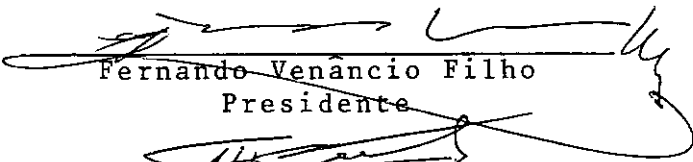


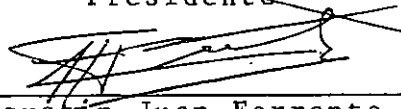
UM ALGORÍTMO DE ORDEM SUPERIOR PARA A INTEGRAÇÃO DIRETA DAS  
EQUAÇÕES DA DINÂMICA ESTRUTURAL


Helio José Corrêa Barbosa


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA-  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:

  
Fernando Venâncio Filho  
Presidente

  
Agustín Juan Ferrante

  
Luiz Bevilacqua

  
Edison Castro Prates de Lima

  
Nelson Francisco Favilla Ebecken

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1978

A meus pais e  
meus irmãos

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Fernando Venâncio Filho pela sugestão do tema e orientação dada ao presente trabalho.

A Abimael F.D. Loula e Nelson F.F. Ebecken pela amizade, estímulo e colaboração dispensados.

Aos Professores da COPPE/UFRJ, na pessoa de seu Diretor Paulo Alcântara Gomes, pelos ensinamentos ministrados.

Aos funcionários da Biblioteca Central do Centro de Tecnologia e do Núcleo de Computação Eletrônica pela atenção.

A CAPES e COPPE pelo apoio financeiro.

A Helena Santos de Oliveira pelo esmerado trabalho de datilografia.

A Maria Marcia Correa Barbosa, pela dedicação na confecção de toda a parte gráfica, meu especial agradecimento.

## ÍNDICE

I	- INTRODUÇÃO .....	1
II	- FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO .....	2
	2.1 - Introdução .....	2
	2.2 - Formulação das Equações de Movimento .....	2
	2.2.1 - Emprego das Leis de Newton .....	3
	2.2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	3
	2.2.3 - Princípio de Hamilton .....	4
	2.3 - Discretização Espacial .....	6
	2.3.1 - Métodos Residuais .....	7
	2.3.2 - Métodos Variacionais - Método de Ritz ..	10
	2.3.3 - Funções Localizadas - Método dos Elementos Finitos .....	12
III	- MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO MODELO DISCRETO .....	14
	3.1 - Introdução .....	14
	3.2 - Características do Modelo Discreto .....	14
	3.2.1 - Introdução do Amortecimento .....	18
	3.3 - Superposição Modal .....	19
	3.4 - Integração Direta .....	24
	3.5 - Algoritmos Baseados na Interpolação das Forças de Inércia .....	31
IV	- PROCEDIMENTOS IMPLEMENTADOS - EXEMPLOS - CONCLUSÕES ..	56
	4.1 - Introdução .....	56
	4.2 - Elementos Implantados .....	56
	4.2.1 - Matrizes de Massa .....	58
	4.2.2 - Matrizes de Rigidez .....	65
	4.3 - Elementos Escalares .....	70
	4.4 - Matriz de Amortecimento .....	71

4.5 - Vetor de Excitações Externas .....	74
4.6 - Critério de Convergência .....	76
4.7 - Fluxograma .....	78
4.8 - Exemplos de Aplicação .....	82
4.9 - Conclusões .....	109
 BIBLIOGRAFIA .....	 111
 APÊNDICE .....	 115

## I - INTRODUÇÃO

A obtenção da resposta de sistemas estruturais submetidos a solicitações de natureza dinâmica é um problema que tem merecido contínua atenção por parte dos pesquisadores. Isto se deve, por um lado, à própria necessidade de se resolver problemas físicos cada vez mais complexos e por outro às dificuldades relacionadas com a integração das equações diferenciais de movimento.

A procura de algoritmos que combinem precisão com rapidez (eficiência computacional) continua para que problemas novos e maiores possam ser abordados e resolvidos a um custo razoável.

No presente trabalho estuda-se um algoritmo de integração passo a passo desenvolvido em [1, 2, 3] para a obtenção da resposta, a solicitações de natureza determinística, de estruturas em que se considera não-linearidade geométrica e materiais elásticos lineares.

No Capítulo II a formulação das equações de movimento e alguns processos de discretização espacial são comentados chegando-se às equações de movimento na forma discreta.

No Capítulo III métodos de solução dessas equações de movimento do modelo discreto são revistos.

Apresenta-se e discute-se o algoritmo implementado, deixando-se para o Capítulo IV a descrição mais detalhada dos procedimentos implantados bem como alguns exemplos de aplicação do algoritmo e as conclusões obtidas.

## II - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

### 2.1 - INTRODUÇÃO

Os sistemas mecânicos, para fins de análise, podem ser classificados em dois grupos, segundo a natureza das variáveis cinemáticas (deslocamentos, velocidades e acelerações) cuja variação ao longo do tempo deseja-se conhecer.

Um sistema é dito *discreto* quando seu estado fica perfeitamente definido a partir do conhecimento dos valores assumidos por aquelas variáveis cinemáticas em um conjunto finito de pontos desse sistema. O domínio das variáveis independentes é o tempo.

Diz-se *contínuo* quando suas propriedades mecânicas são funções contínuas de variáveis espaciais e a caracterização do seu estado é feita mediante a adoção de variáveis cinemáticas que variam continuamente com a posição e o tempo.

As equações diferenciais de movimento são ordinárias no primeiro caso e parciais no caso de sistemas contínuos.

Normalmente os sistemas contínuos são estudados por meio de técnicas numéricas que conduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo: modelo discreto.

Neste capítulo discute-se a formulação das equações de movimento de sistemas contínuos e algumas técnicas de discretização.

### 2.2 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações de movimento de sistemas mecânicos podem ser obtidas através de:

### 2.2.1 - Emprego das Leis de Newton

De acordo com as leis do movimento de Newton, em um referencial inercial, a variação da quantidade de movimento linear de uma partícula é igual a resultante das forças aplicadas sobre ela; e a variação da quantidade de movimento angular, com relação à origem dos eixos coordenados é igual a resultante do momento de todas as forças em relação a essa mesma origem.

A aplicação geral desses princípios a meios contínuos é feita de maneira a assegurar que o movimento de cada partícula desse meio obedeça às leis de Newton e assim são obtidas as equações diferenciais parciais de movimento.

Entretanto é no caso de sistemas discretos ou sistemas contínuos simples que a aplicação direta das leis de Newton é usualmente feita.

Introduzindo-se o conceito de forças de inércia, pelo princípio de d'Alembert, as equações de movimento passam a ser obtidas de maneira análoga ao problema estático: a partir de condições de equilíbrio.

As forças atuantes no sistema podem incluir forças de restituição de diversos tipos e forças externas dependentes do tempo e/ou de deslocamentos que, juntamente com as forças de inércia e de ligação, deverão ser consideradas vetorialmente para o estabelecimento do equilíbrio.

Em sistemas simples esta é, frequentemente, a forma mais direta e conveniente de se obter as equações de movimento.

### 2.2.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser expresso como se segue. Se um sólido, em equilíbrio sob a ação de for-



ças de volume e de superfície, é submetido a um deslocamento virtual, isto é, um campo de deslocamentos contínuo, infinitesimal, arbitrário, porém compatível com as restrições impostas ao sólido, o trabalho virtual realizado pelas forças externas é igual ao trabalho virtual das solicitações internas. Ou seja:

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (2.1)$$

A equação acima é pois uma afirmação de equilíbrio estático. Sua extensão ao problema dinâmico é feita através do princípio de d'Alembert com a inclusão das forças de inércia na expressão do trabalho virtual das forças externas.

O princípio tem a vantagem de não fazer uso das forças de ligação, já que não realizam trabalho em deslocamentos virtuais, o que não pode ser feito quando da aplicação direta das leis de Newton. Observa-se que se trata de um princípio escalar.

### 2.2.3 - Princípio de Hamilton

Dado um sistema dinâmico sujeito a forças externas e restrições geométricas, chama-se de configuração admissível do sistema qualquer configuração que atenda às restrições impostas.

Ao conjunto de todas as configurações reais assumidas continuamente pelo sistema entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  chama-se caminho dinâmico. Uma variação virtual em relação ao caminho dinâmico gera um caminho variado.

Considerando-se apenas os caminhos que coincidem com o caminho real em  $t_1$  e  $t_2$  o princípio de Hamilton afirma então que o caminho real tomado pelo sistema é tal que satisfaz a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta(T - V) + \delta W_{NC} \right] dt = 0 \quad (2.2)$$

onde:

$T$  = energia cinética total do sistema

$V$  = energia potencial total do sistema, incluindo energia de deformação e o potencial de todas as forças externas conservativas

$\delta W_{NC}$  = trabalho virtual das forças não-conservativas atuantes no sistema

Para sistemas conservativos trata-se de tornar estacionário o funcional:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \quad (2.3)$$

que, sob certas condições [4], assume um mínimo.

Esta formulação prescinde do conhecimento explícito das forças atuantes e usa grandezas escalares, sendo a de emprego mais generalizado em problemas complexos.

Deve ser lembrado que os três procedimentos de formulação apresentados levam às mesmas equações diferenciais de movimento ou equações de equilíbrio dinâmico.

Fazendo-se uso das equações de compatibilidade para sistemas contínuos e das equações constitutivas para materiais elásticos obtêm-se, num referencial inercial, equações de movi

mento na forma:

$$\underline{D} \left[ \underline{u}(\underline{r}, t) \right] + \underline{M}(\underline{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{u}(\underline{r}, t) = \underline{F}(\underline{r}, t) \quad (2.4)$$

onde:

$\underline{D}$  é um operador diferencial constituído de derivadas em relação às coordenadas espaciais  $\underline{r}$  e representando as características de rigidez do sistema.

$\underline{M}$  é uma matriz função das coordenadas espaciais  $\underline{r}$  caracterizando a distribuição de massa do sistema.

$\underline{F}$  é o vetor de ações aplicadas ao sistema

$\underline{u}$  é o vetor de deslocamentos incógnitos

Para sistemas naturalmente discretos as equações de movimento seriam:

$$\underline{F}(\underline{q}) + \underline{M} \ddot{\underline{q}} = \underline{Q}(t) \quad (2.5)$$

onde os pontos indicam derivação em relação ao tempo e:

$\underline{F}$  é o vetor de forças elásticas de restituição

$\underline{M}$  é a matriz de massa diagonal do sistema

$\underline{Q}$  é o vetor de ações externas aplicadas

$\underline{q}$  é o vetor de deslocamentos generalizados incógnitos

### 2.3 - DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Embora para alguns sistemas contínuos simples com condições de contorno também simples seja possível encontrar soluções exatas, tais casos constituem exceção. Nos problemas reais

quando é possível formular as equações diferenciais parciais de movimento nem sempre é possível resolvê-las; e, quando se consegue resolvê-las, podem não ser satisfeitas as condições de contorno.

São usadas então técnicas numéricas que conduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo análogas às equações de um sistema discreto.

Entre os diversos processos de discretização [5, 6] será feita referência apenas àqueles que empregam funções de aproximação.

Estes processos assumem que a resposta do sistema contínuo pode ser aproximada por uma série finita na forma:

$$\underline{u}_n(\underline{r}, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\underline{r}) q_i(t) \quad (2.6)$$

onde  $\phi_i(\underline{r})$  são as funções de aproximação dependentes somente da variável espacial  $\underline{r}$  e  $q_i(t)$  são coordenadas generalizadas incógnitas funções do tempo.

O objetivo é escolher funções  $\phi$  que sejam convenientes do ponto de vista computacional e proporcionem uma boa aproximação para a solução  $\underline{u}$ .

De acordo com o critério de aproximação adotado, tais processos podem ser chamados de residuais ou variacionais.

### 2.3.1 - Métodos Residuais

A característica principal dos métodos residuais é fazer uso direto da equação diferencial de movimento (2.4), introduzindo nela a solução aproximada (2.6) que, em princípio, deverá satisfazer a todas as condições de contorno.

Como a solução não é a exata essa substituição dá origem a um resíduo:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{r}, t) = \underline{D} \left[ \underline{u}_n \right] + \underline{M}(\underline{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{u}_n - \underline{F}(\underline{r}, t) \quad (2.7)$$

A idéia básica comum aos métodos residuais é determinar a aproximação  $\underline{u}_n$  de maneira a minimizar, de alguma forma, o erro  $\underline{\varepsilon}(\underline{r}, t)$  cometido.

Assim o diferente tratamento dado ao resíduo  $\underline{\varepsilon}(\underline{r}, t)$  dá origem a diversos processos tais como Galerkin e colocação, vistos a seguir.

a) - Método de Galerkin -

Nesse método o resíduo  $\underline{\varepsilon}(\underline{r}, t)$  é ponderado pelas  $n$  funções de aproximação e integrado sobre o domínio  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \phi_i^T(\underline{r}) \underline{\varepsilon}(\underline{r}, t) d\Omega \quad i = 1, 2 \dots n \quad (2.8)$$

Igualando-se essas  $n$  integrais a zero obtêm-se  $n$  equações diferenciais ordinárias nas coordenadas  $q_j(t)$  na forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \phi_i^T \underline{D} \left[ \phi_j \right] d\Omega q_j(t) + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \phi_i^T \underline{M} \phi_j d\Omega \ddot{q}_j(t) = \\ = \int_{\Omega} \phi_i^T \underline{F}(\underline{r}, t) d\Omega \quad i = 1, 2 \dots n \end{aligned} \quad (2.9)$$

ou ainda:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{q}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{Q}}(t) \quad (2.10)$$

Os coeficientes das matrizes seriam:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\phi}}_j \, d\Omega \quad (2.11a)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{D}} \left[ \underline{\underline{\phi}}_j \right] \, d\Omega \quad (2.11b)$$

$$Q_i = \int_{\Omega} \underline{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{r}}, t) \, d\Omega \quad (2.11c)$$

Observe-se que as matrizes obtidas serão simétricas no caso de operadores auto-adjuntos [5] .

As funções  $\underline{\underline{\phi}}_i$  foram escolhidas de maneira a atender as condições de contorno associadas ao problema, e, consequentemente, os resíduos foram construídos somente sobre o domínio  $\Omega$ . Essas condições podem ser relaxadas [7] adotando-se funções  $\underline{\underline{\phi}}_i$  que somente satisfaçam às condições de contorno geométricas, desde que se considerem resíduos ponderados também no contorno e que sejam adicionados à expressão (2.8).

#### b) - Método da Colocação -

O método da colocação admite inicialmente uma classificação de acordo com a natureza das funções de aproximação  $\underline{\underline{\phi}}_i$  :

- i) Método do Contorno - quando as funções  $\underline{\underline{\phi}}_i$  satisfazem somente à equação diferencial
- ii) Método do Interior - quando as funções  $\underline{\underline{\phi}}_i$  satisfazem às condições de contorno mas não satisfazem à equação diferencial
- iii) Método Misto - quando as funções  $\underline{\underline{\phi}}_i$  não satisfazem nem à equação diferencial nem às condições de contorno.

O método consiste em se tomar pontos no contorno e/ou no domínio, de acordo com o caso i), ii) ou iii), e igualar a zero, em cada ponto, uma ou mais componentes do erro  $\underline{\varepsilon}(\underline{r}_i, t)$  gerando um total de  $n$  equações diferenciais ordinárias nas coordenadas  $q_j(t)$  que, considerando o caso ii), se escrevem:

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \left[ \phi_j(\underline{r}_i) \right] q_j(t) + \sum_{j=1}^n M_{ij}(\underline{r}_i) \phi_j(\underline{r}_i) \ddot{q}_j(t) = F_i(\underline{r}_i, t) \quad (2.12)$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

$D_{ij}$  e  $M_{ij}$  só contêm a linha correspondente à componente de  $\underline{\varepsilon}$  considerada e o elemento de  $F(\underline{r}_i, t)$  correspondente é denotado por  $F_i(\underline{r}_i, t)$ . Em forma matricial:

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{Q}(t) \quad (2.13)$$

onde os coeficientes são:

$$m_{ij} = M_{ij}(\underline{r}_i) \phi_j(\underline{r}_i) \quad (2.14a)$$

$$k_{ij} = D_{ij} \left[ \phi_j(\underline{r}_i) \right] \quad (2.14b)$$

$$Q_i = F_i(\underline{r}_i, t) \quad (2.14c)$$

De imediato nota-se que os coeficientes acima são obtidos diretamente, sem integração como no método de Galerkin. Por outro lado não se pode garantir a simetria das matrizes de massa e rigidez o que, além de complicar o problema de auto-valor, prejudica a eficiência dos métodos numéricos de resolução das equações diferenciais ordinárias resultantes.

### 2.3.2 - Métodos Variacionais - Método de Ritz

A característica principal dos métodos variacionais

é não operar diretamente sobre as equações diferenciais de movimento (2.4), como fazem os métodos residuais, e sim sobre uma forma variacional equivalente (2.2).

O mais conhecido desses métodos é o método de Ritz. No método de Ritz a aproximação  $\underline{u}_n$  adotada é da forma:

$$\underline{u}_n = \sum_{i=1}^n \phi_i(\underline{r}) q_i(t) \quad (2.15)$$

Dessa maneira a solução aproximada  $\underline{u}_n$  estará, em cada instante  $t$ , restrita ao sub-espço  $S_n$  de dimensão  $n$  gerado pelas funções  $\phi_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) escolhidas e não no espaço de dimensão infinita em que o problema foi originalmente proposto. A aproximação  $\underline{u}_n$  é levada ao princípio variacional, no caso o princípio de Hamilton (2.2), e são obtidas equações diferenciais ordinárias nas coordenadas generalizadas  $q_i(t)$ .

As funções  $\phi_i$  são linearmente independentes e devem atender à condição de admissibilidade e formarem um conjunto completo para se garantir a convergência do processo a medida que  $n$  cresce.

A condição de admissibilidade implica em que as funções  $\phi_i$  devam ter derivadas contínuas até ordem  $m - 1$ , onde  $m$  é a maior ordem de derivação que surge no funcional (2.2), e satisfaçam às condições de contorno geométricas.

O conjunto de funções  $\phi_i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) é dito completo [8] num espaço  $S$  quando para qualquer elemento  $\underline{u}$  pertencente a  $S$  existe uma combinação  $\underline{u}_n = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$  que converge para  $\underline{u}$ , na norma de  $S$ , quando  $n$  tende para infinito.



### 2.3.3 - Funções Localizadas - Método dos Elementos Finitos

Até aqui todos os métodos faziam uso da aproximação (2.6) onde as funções  $\phi_i(\underline{r})$  além de atender pelo menos às condições de contorno geométricas, deveriam se estender por todo o domínio.

A construção das funções  $\phi_i$  torna-se frequentemente impraticável em problemas práticos onde elas devem também representar adequadamente contornos irregulares e propriedades materiais complexas.

A idéia de se adotar funções de aproximação que se anulam em todo o domínio exceto em sub-regiões leva ao método dos elementos finitos [7] .

No método dos elementos finitos o domínio é dividido em sub-domínios, ou elementos, de formato conveniente, definidos por um conjunto de pontos desse sub-domínio, chamados nós.

Sobre cada elemento são assumidas as funções de aproximação, em geral na forma de polinômios simples, que se anulam fora do elemento considerado.

Além disso os deslocamentos (e eventualmente suas derivadas em relação a variáveis espaciais) são tomadas como coordenadas generalizadas que passam assim a ter significado físico claro.

Dessa maneira as funções de aproximação se tornam funções de interpolação tendo valor unitário no nó correspondente e nulo em todos os demais.

A maior vantagem [9] da discretização pelo método dos elementos finitos reside no fato de se poder aproximar domínios arbitrários com propriedades físicas complexas usando um con

junto de elementos de formas e propriedades simples.

A introdução das condições de contorno geométricas, feita após a montagem do sistema de equações, é facilitada e é possível alto grau de automatização do método. Para se obter uma melhor aproximação pode-se proceder agora de duas formas:

- a) Aumenta-se o número de elementos em que o domínio é dividido mantendo-se as funções de interpolação em cada elemento.
- b) Mantem-se o número de elementos em que o domínio é dividido e refinam-se as funções de interpolação em cada elemento.

Observe-se que fora do método dos elementos finitos a única alternativa é aumentar o número de funções  $\phi_i$ , definidas em todo o domínio, na série (2.6).

### III - MÉTODOS DE SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DO MODELO DISCRETO

#### 3.1 - INTRODUÇÃO

A solução das equações de movimento do modelo discreto, formuladas no capítulo anterior, poderia ser obtida por qualquer processo numérico clássico para a resolução de problemas de valor inicial.

A prática mostrou entretanto que na maioria dos problemas de dinâmica estrutural tais processos são ineficientes.

Os processos mais usados em dinâmica estrutural são :

- a) superposição modal
- b) integração direta

As características dos dois processos serão comentadas neste capítulo. Antes porém serão definidas as principais propriedades do modelo discreto.

#### 3.2 - CARACTERÍSTICAS DO MODELO DISCRETO

A aplicação dos métodos de discretização espacial vistos até aqui, conduz sempre a um sistema de equações diferenciais ordinárias que pode ser colocado na forma:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{u}}} + \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{F}}(t) \quad (3.1a)$$

para sistemas não lineares, e na forma:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{u}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}(t) \quad (3.1b)$$

para sistemas lineares.

As matrizes  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$ , de massa e rigidez respectivamente, e o vetor  $\underline{F}$  de ações externas, são obtidos de acordo com o processo adotado. Note-se que o emprego do método de Ritz ou Galerkin, em conjunto com o método dos elementos finitos, faz com que essas matrizes sejam simétricas e em banda o que é muito vantajoso do ponto de vista computacional.

As características principais do modelo discreto surgem ao se procurar soluções da forma:

$$\underline{u}(t) = \underline{x} f(t) \quad (3.2)$$

para o problema de vibrações livres:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{0} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) em (3.3) obtém-se:

$$\underline{M} \underline{x} \ddot{f}(t) + \underline{K} \underline{x} f(t) = \underline{0} \quad (3.4)$$

ou seja,  $n$  equações:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \ddot{f}(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j f(t) = 0 \quad i = 1, 2 \dots n \quad (3.5)$$

nas quais podem ser separadas as variáveis:

$$-\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j} \quad i = 1, 2 \dots n \quad (3.6)$$

Como a expressão à esquerda da igualdade (3.6) independe do índice  $i$  e a expressão à direita independe do tempo, ambas devem ser constantes e assim pode-se escrever:

$$\ddot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) x_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

Ao se escolher uma constante positiva  $\omega^2$  obtêm-se soluções harmônicas na equação (3.7) da forma:

$$f(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad (3.9)$$

onde  $A$  e  $\phi$  são constantes arbitrárias e os valores que  $\omega$  pode assumir são dados pelas equações (3.8) que constituem um problema de auto-valor que se escreve matricialmente:

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{x} = \underline{0} \quad (3.10)$$

Para matrizes  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  simétricas e positivas definidas são encontrados  $n$  valores para  $\omega^2$  e as respectivas raízes quadradas positivas são as chamadas frequências naturais do sistema (3.1b).

A cada frequência natural  $\omega$  está associado um auto-vetor  $\underline{x}$ , obtido a menos de uma constante multiplicativa, chamado modo normal de vibração, que satisfaz a equação (3.10).

Chama-se de matriz modal  $\underline{X}$  do sistema a matriz cujas colunas são os auto-vetores do sistema ordenados, segundo as respectivas frequências, de maneira crescente.

Os modos normais podem ser normalizados em relação

à matriz de massa pela relação:

$$\underline{\tilde{x}}^T \underline{\tilde{M}} \underline{\tilde{x}} = 1 \quad (3.11)$$

que determina de maneira única o módulo das componentes de  $\underline{\tilde{x}}$ .

A propriedade mais importante dos modos normais é a sua ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez:

$$\underline{\tilde{x}}^T \underline{\tilde{M}} \underline{\tilde{x}} = \underline{\tilde{I}} \quad (3.12a)$$

$$\underline{\tilde{x}}^T \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{x}} = \underline{\tilde{\omega}}^2 \quad (3.12b)$$

onde  $\underline{\tilde{I}}$  é a matriz identidade de ordem  $n$  e  $\underline{\tilde{\omega}}$  é a matriz diagonal contendo as frequências naturais do sistema.

Observe-se que enquanto o sistema contínuo apresenta um espectro de frequências discreto que parte da fundamental (a mais baixa) e cresce indefinidamente, o modelo discreto (3.1b) que o aproxima tem um espectro limitado.

A frequência mais alta desse espectro é chamada frequência de corte (cut-off frequency) e representa o limite superior de excitação do modelo discreto; excitações em frequências mais altas produzem ruído ou resposta espacial aleatória [10].

Outra característica comum aos modelos discretos [11] é a tendência de deterioração da resposta à medida que as frequências de excitação se aproximam da frequência de corte.

Isto se deve aos erros no espectro de frequências e nos modos normais do sistema discreto, que são maiores nas frequências e modos mais altos.

Quanto à solução do problema da resposta dinâmica é de interesse identificar quatro tipos de solução [10] :

- 1) A solução exata das equações de movimento do sistema contínuo
- 2) A solução exata das equações de movimento do modelo discreto (3.1) conservando número ilimitado de dígitos nas operações aritméticas.
- 3) A solução exata das equações (3.1) porém com número limitado de dígitos nas operações aritméticas.
- 4) A solução aproximada das equações (3.1) também com número limitado de dígitos nas operações aritméticas.

Define-se então erro de truncamento como aquele causado pela substituição de um sistema contínuo por um modelo discreto e é a diferença entre as soluções 1 e 2 .

Erro de arredondamento (round-off error) depende do grau de precisão dos cálculos aritméticos e é a diferença entre as soluções 2 e 3. A diferença das soluções 3 e 4 dependerá do algoritmo de integração empregado; é o erro de integração.

Será vista a seguir a caracterização do amortecimento.

### 3.2.1 - Introdução do Amortecimento

Todo sistema dinâmico real apresenta alguma forma de dissipação de energia. A definição desses mecanismos de dissipação de energia é muito difícil e normalmente são empregados modelos matemáticos convenientes para sua representação de forma aproximada. São citados a seguir três desses modelos.

Chama-se de amortecimento de Coulomb ou atrito seco aquele que dá origem a uma força de módulo constante e que se opõe sempre ao movimento.

Amortecimento estrutural [5] é outro modelo também usado e está relacionado com a energia dissipada internamente no material da estrutura.

Entretanto, o modelo mais usado, devido a sua relativa comodidade, é o amortecimento viscoso linear que dá origem a uma força proporcional à velocidade e de sentido oposto a ela.

Neste caso, introduzindo-se o amortecimento diretamente no modelo discreto, obtém-se:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{u}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{u}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{F}}(t) \quad (3.13)$$

No Capítulo IV formas usuais de construção da matriz de amortecimento  $\underline{\underline{C}}$  serão abordadas.

### 3.3 - SUPERPOSIÇÃO MODAL

O processo de superposição modal [5, 6] é adequado ao caso em que as matrizes  $\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  e  $\underline{\underline{K}}$  são constantes no tempo e busca o desacoplamento do sistema de equações (3.13) através de uma transformação linear conveniente.

Sua eficiência está ligada à forma da matriz  $\underline{\underline{C}}$  que dá origem a dois procedimentos distintos conforme o amortecimento seja do tipo proporcional ou não-proporcional.

#### a) Amortecimento Proporcional

Ocorre quando os modos normais são ortogonais à matriz de amortecimento e a transformação linear procurada é:

$$\underline{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{X}} \underline{\underline{\eta}}(t) \quad (3.14)$$



onde  $\underline{\eta}(t)$  são as novas coordenadas generalizadas e  $\underline{X}$  é a matriz modal do sistema.

Introduzindo-se a transformação (3.14) nas equações de movimento (3.13) e levando em conta as relações de ortogonalidade (3.12) e a nova relação:

$$\underline{X}^T \underline{C} \underline{X} = \underline{C}^* \quad (3.15)$$

onde  $\underline{C}^*$  é diagonal com seus elementos dados por:

$$C_{ii}^* = 2 \xi_i \omega_i \quad (3.16)$$

com:

$\omega_i$  = frequência natural do modo  $i$

$\xi_i$  = fração do amortecimento crítico do modo  $i$

as equações se desacoplam na forma:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = N_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

onde os  $N_i$  são elementos do vetor de forças generalizadas:

$$\underline{N}(t) = \underline{X}^T \underline{F}(t) \quad (3.18)$$

A solução das equações (3.17) pode ser obtida pela transformada de Laplace. No caso mais comum de  $\xi_i < 1$  temos:

$$\begin{aligned}
\eta_i(t) = & \frac{1}{\omega_{id}} \int_0^t N_i(\tau) \exp \left[ -\xi_i \omega_i (t - \tau) \right] \sin \omega_{id} (t - \tau) d\tau + \\
& + \exp(-\xi_i \omega_i t) \left[ \cos \omega_{id} t + \frac{\xi_i}{(1 - \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}} \sin \omega_{id} t \right] \eta_i(0) + \\
& + \left[ \frac{1}{\omega_{id}} \exp(-\xi_i \omega_i t) \sin \omega_{id} t \right] \dot{\eta}_i(0)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

com:

$$\omega_{id} = \omega_i (1 - \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\eta}(0) = \underline{x}^T \underline{M} \underline{u}(0) \tag{3.20}$$

$$\dot{\underline{\eta}}(0) = \underline{x}^T \underline{M} \dot{\underline{u}}(0)$$

onde a integral de convolução deverá, em geral, ser calculada numericamente.

Uma alternativa é aplicar sobre as equações (3.17) um algoritmo de integração direta como os que serão vistos mais adiante.

A solução final é dada pela superposição das respostas correspondentes a cada modo através de (3.14).

Dessa maneira, o processo de superposição modal envolve a resolução de um problema de autovalor para a determinação de uma nova base para o espaço dos vetores deslocamentos onde as equações se apresentem desacopladas para, em seguida, ser feita a integração no tempo.

A grande vantagem dessa mudança de base é que, para vários tipos de problema, é possível se obter uma boa aproximação para a resposta considerando-se apenas uma pequena fração do número total de equações desacopladas, normalmente aquelas correspondentes aos primeiros modos. Isto permite também que apenas os primeiros autovalores e autovetores sejam calculados.

A resposta é truncada, só se considerando as contribuições dos  $p$  primeiros modos onde  $p$  é determinado pelas características da estrutura, pela distribuição espacial do carregamento e pelo seu conteúdo de frequências.

#### b) Amortecimento Não-Proporcional

Neste caso a matriz  $\underline{C}^*$  da equação (3.15) não é diagonal e as equações de movimento na base formada pelos modos normais são ainda acopladas pela matriz de amortecimento  $\underline{C}^*$ .

Entretanto, sempre que a resposta estiver essencialmente contida nos  $p$  primeiros modos, o processo mais eficiente [12] parece ser integrar diretamente o sistema truncado formado pelas  $p$  primeiras equações na base dos modos normais:

$$\ddot{\underline{\eta}} + \bar{\underline{C}}^* \dot{\underline{\eta}} + \bar{\omega}^2 \underline{\eta} = \bar{\underline{N}}(t) \quad (3.21)$$

onde a matriz  $\bar{\underline{C}}^*$  é obtida a partir de  $\underline{C}^*$  desprezando-se o acoplamento entre os  $p$  primeiros modos considerados na resposta e os restantes  $(n - p)$  modos superiores.

Em (3.21) as matrizes são de ordem  $(p \times p)$  e os vetores de ordem  $p$ . Uma maneira de desacoplar o sistema consiste em inicialmente transformar o sistema de  $n$  equações diferenciais de 2ª ordem num sistema de  $2n$  equações diferenciais de 1ª

ordem como mostrado em [5] .

A partir daí a solução é obtida de maneira semelhante ao caso não-amortecido, envolvendo um problema de auto-valor de ordem  $2n$  e a determinação da matriz modal associada que desacopla o sistema. Resultam  $2n$  equações diferenciais de 1ª ordem desacopladas cuja solução pode ser obtida por meio da transformada de Laplace. Entretanto o fato de se dobrar a ordem do problema de autovalor e o uso de aritmética complexa acarretam um aumento de esforço computacional que, normalmente, não compensa a vantagem de se ter equações desacopladas.

Nesse caso é preferível a integração direta de todas as equações (3.13) ou a integração das  $p$  primeiras equações nas coordenadas modais, equação (3.21).

Qualquer que seja o tipo de amortecimento, o processo de superposição modal exige que as matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{K}$  sejam constantes no tempo o que limita o seu uso a problemas lineares, embora em [13] sua extensão ao caso não-linear tenha sido proposta.

Note-se que o único erro inerente ao processo é de truncamento, quando as contribuições dos modos mais altos são desprezadas. Pelo visto a maior eficácia da superposição modal se dá em problemas lineares cuja resposta pode ser bem representada pela superposição das respostas correspondentes a uma pequena fração do número total de modos da estrutura, geralmente os mais baixos.

### 3.4 - INTEGRAÇÃO DIRETA

Os métodos de integração direta recebem esta denominação por não efetuarem nenhuma transformação prévia nas equações de movimento.

O sistema de equações em sua forma original, acoplada, é integrado numericamente por um procedimento passo a passo a partir do conhecimento das condições iniciais do problema.

A instituição dos algoritmos de integração direta pode ser feita a partir de pelo menos três idéias básicas vistas a seguir.

A primeira idéia consiste em se discretizar o operador diferencial com o uso de fórmulas de diferenças finitas como no caso do método da diferença central [14] .

Uma outra maneira consiste em assumir formas de variação para as acelerações, velocidades e deslocamentos ao longo do tempo em cada intervalo de integração e satisfazer as equações de movimento nos pontos extremos desses intervalos de tempo. É o caso do método da aceleração linear e o método -  $\theta$  de Wilson [15]. Um procedimento alternativo seria assumir formas de variação para acelerações, velocidades e deslocamentos ao longo do intervalo de integração e aplicar um critério de aproximação como o de Galerkin [6, 16] .

Embora a instituição dos métodos possa ser distinta chega-se sempre a uma relação de recorrência que permite o avanço da solução no tempo e pode geralmente ser escrita na forma:

$$\underline{D}_1 \bar{u}(t_{n+1}) = \underline{D}_0 \bar{u}(t_n, t_{n-1}, \dots) + \underline{P} \quad (3.22)$$

com:

$$\bar{\underline{u}}(t_{n+1}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t_{n+1}) \\ \dot{\underline{u}}(t_{n+1}) \\ \underline{u}(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\underline{u}}(t_n, t_{n-1}, \dots) = \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t_n) \\ \dot{\underline{u}}(t_{n-1}) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

onde  $\underline{D}_0$  e  $\underline{D}_1$  são matrizes que definem a transformação dos vetores de aceleração, velocidade e deslocamento nos tempos  $t_n$ ,  $t_{n-1}$ , ... nos vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do tempo  $t_{n+1}$ .  $\underline{P}$  é um vetor que leva em conta a excitação externa.

As matrizes  $\underline{D}_0$  e  $\underline{D}_1$  são funções das propriedades do sistema (matrizes de massa, amortecimento e rigidez) e do intervalo de integração  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Supondo-se que  $\underline{D}_1$  seja inversível, a equação (3.22) se escreve:

$$\bar{\underline{u}}(t_{n+1}) = \underline{D}_1^{-1} \underline{D}_0 \bar{\underline{u}}(t_n, t_{n-1}, \dots) + \underline{D}_1^{-1} \underline{P} \quad (3.23a)$$

ou ainda:

$$\bar{\underline{u}}(t_{n+1}) = \underline{A} \bar{\underline{u}}(t_n, t_{n-1}, \dots) + \underline{D}_1^{-1} \underline{P} \quad (3.23b)$$

onde  $\underline{A} = \underline{D}_1^{-1} \underline{D}_0$  é o operador de integração.

Quando as matrizes de massa, amortecimento e rigidez não são funções dos deslocamentos ou de suas derivadas a transformação é dita linear.

Se o vetor  $\bar{\underline{u}}$  do 2º membro da relação (3.22) con-

têm informações apenas do instante anterior  $t_n$  o método é dito de um passo (one-step); se contém informações de tempos anteriores  $t_{n-1}$ ,  $t_{n-2}$ , ... é chamado de múltiplos passos (multi-step).

Sempre que a matriz  $D_1$  puder ser colocada em forma triangular o algoritmo é dito explícito; caso contrário implícito.

Outra classificação importante surge a partir do estudo da estabilidade do operador de integração [16, 17, 18, 19] e a esse respeito serão feitas a seguir algumas observações baseadas na referência [16] onde o problema é abordado de maneira mais rigorosa e completa.

Um algoritmo de integração é dito estável se todos os operadores do conjunto  $\tilde{A}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) forem uniformemente limitados, ou seja, existem constantes positivas  $K_n$  tal que:

$$\|\tilde{A}^n \underline{v}\| \leq K_n \|\underline{v}\| \quad (3.24)$$

onde  $\|\underline{v}\|$  é a norma de  $\underline{v}$ .

Definindo raio espectral de  $\tilde{A}$  [18] como:

$$\rho = \max |\lambda_i| \quad (3.25)$$

onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $\tilde{A}$ , a condição anterior (3.24) exige que  $\rho$  seja limitado pela unidade.

Pode-se então resumir o comportamento da solução aproximada de um oscilador simples como se segue:

- se  $\rho > 1$  a solução é amplificada ao longo do tempo;
- se  $\rho < 1$  a solução é amortecida ao longo do tempo ;

- se  $\rho = 1$  não há introdução de erro nas amplitudes da solução numérica obtida.

Um operador é dito incondicionalmente estável se a solução para quaisquer condições iniciais não cresce indefinidamente, qualquer que seja o valor do intervalo de integração usado  $\Delta t$ . Quando isto só ocorre para valores de  $\Delta t$  menores que um determinado valor crítico, o operador é dito condicionalmente estável e se não ocorre para qualquer  $\Delta t > 0$  o processo é dito incondicionalmente instável.

Os operadores de integração introduzem, normalmente, dois tipos de erro na solução do problema oscilatório: um erro nas amplitudes e um erro no período.

Quando  $\rho < 1$  há introdução de um amortecimento artificial na solução numérica e a amplitude do deslocamento decai com o tempo. Com relação ao período há, em geral, um aumento do mesmo na solução numérica.

Para a representação da solução oscilatória os autovalores de  $\underline{A}$  devem ser complexos conjugados da forma:

$$\lambda = a \pm bi = e^{\phi(-\bar{\xi} \pm i)} = \rho e^{\pm i\phi} \quad (3.26)$$

onde:

$$\phi = \arctan(b/a) \quad (3.27a)$$

$$\bar{\xi} = - \frac{\ln(a^2 + b^2)}{2\phi} \quad (3.27b)$$

Podem então ser tomados como medidas dos erros introduzidos na solução numérica os parâmetros [20] :



-  $\bar{\xi}$  = amortecimento artificial do algoritmo

$$- \frac{\bar{T} - T}{T} = \frac{\omega \Delta t}{\phi} - 1 = \text{erro relativo no período}$$

onde  $T$  e  $\bar{T}$  são os períodos do oscilador e da solução numérica aproximada, respectivamente.

São comentados a seguir dois operadores muito usados na prática e de características distintas.

a) Método da Diferença Central [14]

Adota para acelerações e velocidades as fórmulas de diferenças finitas:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} \left[ u(t - \Delta t) - 2u(t) + u(t + \Delta t) \right] \quad (3.28a)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2\Delta t} \left[ -u(t - \Delta t) + u(t + \Delta t) \right] \quad (3.28b)$$

que levadas à equação de movimento no tempo  $t$ :

$$\bar{M} \ddot{u}(t) + \bar{C} \dot{u}(t) + \bar{K} u(t) = \bar{F}(t) \quad (3.29)$$

forneem a relação de recorrência do método:

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} \bar{M} + \frac{1}{2\Delta t} \bar{C} \right] u(t + \Delta t) = \bar{F}(t) - \left[ \bar{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \bar{M} \right] u(t) - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \bar{M} - \frac{1}{2\Delta t} \bar{C} \right] u(t - \Delta t) \quad (3.30)$$

onde se usa para a inicialização do processo:

$$\underline{u}(-\Delta t) = \underline{u}(0) - \Delta t \dot{\underline{u}}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\underline{u}}(0) \quad (3.31)$$

Da expressão (3.30) conclui-se que o uso de uma matriz de massa diagonal e, no caso de problemas com amortecimento, uma matriz de amortecimento também diagonal, tornam o método explícito, não havendo necessidade de se resolver um sistema de equações simultâneas e nem de se montar as matrizes globais da estrutura, podendo-se trabalhar a nível de elemento [14].

A desvantagem do método reside no fato de ser apenas condicionalmente estável, exigindo intervalos de integração  $\Delta t \leq \Delta t_{crit.}$ .

No caso linear:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit.} = \frac{T_{min}}{\pi} \quad (2.32)$$

onde  $T_{min}$  é o período mínimo do modelo discreto.

Tem sido aplicado para a obtenção de resposta transiente em problemas lineares [21, 22] e não lineares [23, 24].

#### b) Método de Newmark [25]

O método pode ser visto como uma extensão do método da aceleração linear e adota as expressões:

$$\dot{\underline{u}}(t + \Delta t) = \dot{\underline{u}}(t) + \left[ (1 - \gamma) \ddot{\underline{u}}(t) + \gamma \ddot{\underline{u}}(t + \Delta t) \right] \Delta t \quad (3.33a)$$

$$\underline{u}(t + \Delta t) = \underline{u}(t) + \Delta t \dot{\underline{u}}(t) + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\underline{u}}(t) + \beta \ddot{\underline{u}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (3.33b)$$

onde  $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros que definem a estabilidade e precisão

do algoritmo.

Com a equação de movimento, tomada no tempo  $t + \Delta t$ , e as expressões (3.33) chega-se à relação de recorrência do método:

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{K} + a_0 \tilde{M} + a_1 \tilde{C} \right] \underline{u}(t + \Delta t) &= \underline{F}(t + \Delta t) + \\ &+ \tilde{M} \left[ a_0 \underline{u}(t) + a_2 \dot{\underline{u}}(t) + a_3 \ddot{\underline{u}}(t) \right] + \\ &+ \tilde{C} \left[ a_1 \underline{u}(t) + a_4 \dot{\underline{u}}(t) + a_5 \ddot{\underline{u}}(t) \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} ; a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} ; a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} ; a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 ; a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 ; a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\gamma}{\beta} - 2 \right)$$

Dois casos de interesse são:

- $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{6}$  - corresponde ao método da aceleração linear
- $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$  - é o método da aceleração média constante.

O primeiro é condicionalmente estável e o segundo incondicionalmente estável.

Na equação (3.34) observa-se que o método é implícito e que em problemas onde  $\tilde{K}$  não é constante é necessário efetuar uma nova triangulação a cada intervalo de tempo.

Uma aplicação a problemas não-lineares é apresentada em [26]. Além dos métodos de Newmark e de diferença central, são também comuns aplicações do método -  $\theta$  de Wilson [27] e do método

do de Houboult [28].

De uma maneira geral pode-se dizer que os métodos de integração direta não fazem restrições às matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, sendo assim indicados para os problemas não lineares.

Nos problemas lineares a integração direta é usada naquelas situações em que a superposição modal perde suas vantagens como no caso de amortecimento não-proporcional e resposta rica em frequências.

### 3.5 - ALGORÍTMOS BASEADOS NA INTERPOLAÇÃO DAS FORÇAS DE INÉRCIA

A equação de movimento do modelo discreto pode ser escrita na forma:

$$\underline{\tilde{R}} = \underline{\tilde{M}} \underline{\ddot{u}} = \underline{\tilde{F}}(t) - \underline{\tilde{C}} \underline{\dot{u}} - \underline{\tilde{R}}_E \quad (3.35)$$

onde:

$\underline{\tilde{R}}$  é o vetor das forças de inércia

$\underline{\tilde{R}}_E$  é o vetor das forças elásticas de restituição

O problema será discretizado agora ao longo do tempo adotando-se intervalos de tempo  $\tau = t_{i+1} - t_i$ . Esse intervalo pode ser considerado um elemento finito de tempo ao longo do qual se interpolará o vetor de forças de inércia  $\underline{\tilde{R}}$ .

A sequência de elementos de tempo forma o interva-lo de tempo total a ser estudado.

O vetor das forças de inércia  $\underline{\tilde{R}}$  será interpolado

por polinômios de Hermite a partir dos valores assumidos por  $\tilde{R}$  e suas derivadas em relação ao tempo nos pontos extremos do intervalo  $\tau$ .

Assim são obtidas interpolações lineares, cúbicas, etc., das quais as duas primeiras serão comentadas a seguir.

#### a) Interpolação Linear

Neste caso  $\tilde{R}$  se determina a partir de seus valores nos extremos do intervalo (elemento) de tempo pelas funções de interpolação:

$$\phi_1 = 1 - \xi \quad \text{e} \quad \phi_2 = \xi \quad (3.36)$$

com:

$$\xi = \frac{t}{\tau}$$

A interpolação se escreve:

$$\tilde{R} = \phi_1 \tilde{R}_0 + \phi_2 \tilde{R}_1 \quad (3.37a)$$

ou:

$$\tilde{R} = (1 - \xi) \tilde{R}_0 + \xi \tilde{R}_1 \quad (3.37b)$$

onde os índices 0 e 1 correspondem ao início ( $\xi = 0$ ) e final ( $\xi = 1$ ), respectivamente, do intervalo de tempo  $\tau$ .

#### b) Interpolação Cúbica

Agora as funções de interpolação são os polinômios de Hermite de 3º grau:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1 - 3 \xi^2 + 2 \xi^3 ; \phi_2 = \xi - 2 \xi^2 + \xi^3 ; \phi_3 = 3 \xi^2 - 2 \xi^3 ; \\ \phi_4 &= - \xi^2 + \xi^3\end{aligned}$$

e a interpolação se escreve:

$$\underline{\underline{R}} = \phi_1 \underline{\underline{R}}_0 + \phi_2 \frac{d}{d\xi} \underline{\underline{R}}_0 + \phi_3 \underline{\underline{R}}_1 + \phi_4 \frac{d}{d\xi} \underline{\underline{R}}_1 \quad (3.38a)$$

ou:

$$\underline{\underline{R}} = \phi_1 \underline{\underline{R}}_0 + \phi_2 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_0 + \phi_3 \underline{\underline{R}}_1 + \phi_4 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_1 \quad (3.38b)$$

Já que  $d\xi = \frac{1}{\tau} dt$  .

Integrando a equação de movimento:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{R}}(t) \quad (3.39)$$

de  $t_0$  a um  $t$  genérico dentro do intervalo  $\tau$  obtém-se:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}} = \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \int_0^\xi \underline{\underline{R}} \tau d\xi \quad (3.40)$$

Integrando-se (3.40) chega-se a:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_0 + \xi \tau \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \int_0^\xi \int_0^\xi \underline{\underline{R}} \tau^2 d\xi d\xi \quad (3.41)$$

As equações (3.39), (3.40) e (3.41) em conjunto com as interpolações (3.37) ou (3.38) resultam em dois algoritmos de integração:

a) Interpolação Linear

Introduzindo-se (3.37b) em (3.40) e (3.41), efetuando-se as integrações e fazendo-se  $\xi = 1$  obtêm-se:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_1 = \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau}{2} (\underline{\underline{R}}_0 + \underline{\underline{R}}_1) \quad (3.42a)$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_0 + \tau \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau^2}{3} \underline{\underline{R}}_0 + \frac{\tau^2}{6} \underline{\underline{R}}_1 \quad (3.42b)$$

ou ainda:

$$\dot{\underline{\underline{u}}}_1 = \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau}{2} (\ddot{\underline{\underline{u}}}_0 + \ddot{\underline{\underline{u}}}_1) \quad (3.43a)$$

$$\underline{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{u}}_0 + \tau \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau^2}{3} \ddot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau^2}{6} \ddot{\underline{\underline{u}}}_1 \quad (3.43b)$$

Observe-se que as expressões acima são as mesmas que se obtêm fazendo  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{6}$  nas expressões (3.33) do método de Newmark. Assim a interpolação linear das forças de inércia conduz ao método das acelerações lineares, como era de se esperar.

Neste trabalho apenas o caso da interpolação cúbica será estudado.

b) Interpolação Cúbica

Seguindo-se o mesmo procedimento do caso anterior obtêm-se as expressões:

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_1 = \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau}{12} (6 \underline{\underline{R}}_0 + \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_0 + 6 \underline{\underline{R}}_1 - \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_1) \quad (3.44a)$$

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_1 = \underline{\underline{M}} \underline{\underline{u}}_0 + \tau \underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{u}}}_0 + \frac{\tau^2}{60} (21 \underline{\underline{R}}_0 + 3 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_0 + 9 \underline{\underline{R}}_1 - 2 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_1) \quad (3.44b)$$

ou ainda:

$$\dot{\underline{u}}_1 = \dot{\underline{u}}_0 + \frac{\tau}{12} \underline{M}^{-1} (6 \underline{R}_0 + \tau \dot{\underline{R}}_0 + 6 \underline{R}_1 - \tau \dot{\underline{R}}_1) \quad (3.45a)$$

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_0 + \tau \dot{\underline{u}}_0 + \frac{\tau^2}{60} \underline{M}^{-1} (21 \underline{R}_0 + 3 \tau \dot{\underline{R}}_0 + 9 \underline{R}_1 - 2 \tau \dot{\underline{R}}_1) \quad (3.45b)$$

Este algoritmo assume para as acelerações uma variação cúbica, superior portanto, à dos métodos usuais.

Observe-se que as equações (3.44) ou (3.45) não podem ser resolvidas diretamente por não se conhecer o vetor das forças de inércia  $\underline{R}_1$  e sua derivada  $\dot{\underline{R}}_1$  ao final do intervalo de tempo.

Os processos de solução das equações (3.44) dependerão da forma em que os vetores  $\underline{R}_1$  e  $\dot{\underline{R}}_1$  puderem ser colocados.

É interessante portanto nesse ponto se separar os problemas lineares e os não lineares.

#### i) Problemas Lineares

Nesse caso é possível se escrever:

$$\underline{R}_1 = \underline{F}_1 - \underline{C} \dot{\underline{u}}_1 - \underline{K} \underline{u}_1 \quad (3.46a)$$

$$\dot{\underline{R}}_1 = \dot{\underline{F}}_1 - \underline{C} \ddot{\underline{u}}_1 - \underline{K} \dot{\underline{u}}_1 \quad (3.46b)$$

onde  $\underline{F}_1$  é o vetor das excitações externas ao final do intervalo de tempo considerado.

A introdução das expressões (3.46) nas equações



(3.45), levando em conta que:

$$\ddot{\underline{u}}_1 = \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{R}}_1 \quad (3.47)$$

resulta num sistema de equações que pode ser escrito na forma:

$$\underline{\tilde{D}}_1 \underline{\tilde{r}}_1 = \underline{\tilde{D}}_0 \underline{\tilde{r}}_0 + \underline{\tilde{P}} \quad (3.48)$$

onde os vetores:

$$\underline{\tilde{r}}_0 = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}}_0 \\ \dot{\underline{\tilde{u}}}_0 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\tilde{r}}_1 = \begin{Bmatrix} \underline{\tilde{u}}_1 \\ \dot{\underline{\tilde{u}}}_1 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

representam o estado do sistema no início e no final, respectivamente, do intervalo de tempo e as demais matrizes são definidas por:

$$\underline{\tilde{D}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{M}} + \frac{9}{60} \tau^2 \underline{\tilde{K}} + \frac{2}{60} \tau^3 \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} & ; & \frac{9}{60} \tau^2 \underline{\tilde{C}} - \frac{2}{60} \tau^3 (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{C}}) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\tau}{2} \underline{\tilde{K}} + \frac{\tau^2}{12} \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} & ; & \underline{\tilde{M}} + \frac{\tau}{2} \underline{\tilde{C}} - \frac{\tau^2}{12} (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{C}}) \end{bmatrix} \quad (3.50a)$$

$$\underline{\tilde{D}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{M}} - \frac{21}{60} \tau^2 \underline{\tilde{K}} + \frac{3}{60} \tau^3 \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} & ; & \tau \underline{\tilde{M}} - \frac{21}{60} \tau^2 \underline{\tilde{C}} - \frac{3}{60} \tau^3 (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{C}}) \\ \dots & & \dots \\ -\frac{\tau}{2} \underline{\tilde{K}} + \frac{\tau^2}{12} \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} & ; & \underline{\tilde{M}} - \frac{\tau}{2} \underline{\tilde{C}} - \frac{\tau^2}{12} (\underline{\tilde{K}} - \underline{\tilde{C}} \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{C}}) \end{bmatrix} \quad (3.50b)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \frac{21}{60} \tau^2 \tilde{I} - \frac{3}{60} \tau^3 \tilde{C} \tilde{M}^{-1} & \frac{9}{60} \tau^2 \tilde{I} + \frac{2}{60} \tau^3 \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \\ \frac{\tau}{2} \tilde{I} - \frac{\tau^2}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} & \frac{\tau}{2} \tilde{I} + \frac{\tau^2}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{60} (3 \dot{\tilde{F}}_0 - 2 \dot{\tilde{F}}_1) \\ \frac{\tau^2}{12} (\dot{\tilde{F}}_0 - \dot{\tilde{F}}_1) \end{bmatrix} \quad (3.50c)$$

e  $\tilde{I}$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

A solução é obtida ao longo do tempo pela aplicação sucessiva da equação (3.48) que, colocada na forma:

$$\tilde{r}_1 = \tilde{D}_1^{-1} \tilde{D}_0 \tilde{r}_0 + \tilde{D}_1^{-1} \tilde{P} \quad (3.51)$$

só envolve multiplicações matriciais após a inversão de  $\tilde{D}_1$ . Observe-se que as matrizes em (3.48) são de ordem  $2n$ , onde  $n$  é o número de graus de liberdade do modelo discreto, e que além disso não são simétricas.

Além dessas duas desvantagens existe ainda o problema da estabilidade do algoritmo.

A aplicação das equações (3.45) a um sistema com um grau de liberdade ( $n = 1$ ), sem amortecimento, mostra que o operador de integração é:

$$\tilde{A} = \tilde{D}_1^{-1} \tilde{D}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1 - \frac{13}{30} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \tau^4}{1 + \frac{1}{15} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \tau^4} & \frac{\tau(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{720} \omega^4 \tau^4)}{1 + \frac{1}{15} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \tau^4} \\ \frac{-\omega^2 \tau(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \tau^2)}{1 + \frac{1}{15} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \tau^4} & \frac{1 - \frac{13}{30} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \tau^4}{1 + \frac{1}{15} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{240} \omega^4 \tau^4} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural do oscilador.

Os autovalores  $\lambda$  da matriz  $\tilde{A}$  da equação (3.52) são complexos e de módulo unitário podendo ser colocados na forma:

$$\lambda = e^{\pm i\phi} \quad (3.53)$$

com:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega\tau \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{720} \omega^4 \tau^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{10} \omega^2 \tau^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{13}{30} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{80} \omega^4 \tau^4\right)} \quad (3.54)$$

desde que se adote:

$$\tau < 0.503 T_0 \quad (3.55)$$

onde  $T_0$  é o período do oscilador.

A condição (3.55) caracteriza o algoritmo definido pela interpolação cúbica das forças de inércia como apenas condicionalmente estável.

Para sistemas com vários graus de liberdade,  $T_0$  deve ser substituído na expressão (3.55) por  $T_{\min}$ , período mínimo do sistema, o que acarreta, normalmente, intervalos de integração desnecessariamente pequenos.

É possível, entretanto, modificando ligeiramente os coeficientes das expressões (3.45), tornar o algoritmo incondicionalmente estável como mostrado em [2, 3].

As novas expressões, correspondentes às expressões (3.45) são:

$$\dot{\underline{u}}_1 = \dot{\underline{u}}_0 + \frac{\tau}{12} \underline{\underline{M}}^{-1} (6 \underline{\underline{R}}_0 + \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_0 + 6 \underline{\underline{R}}_1 - \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_1) \quad (3.56a)$$

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_0 + \tau \dot{\underline{u}}_0 + \frac{\tau^2}{60} \underline{\underline{M}}^{-1} (20 \underline{\underline{R}}_0 + 2.5 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_0 + 10 \underline{\underline{R}}_1 - 2.5 \tau \dot{\underline{\underline{R}}}_1) \quad (3.56b)$$

Note-se que apenas a fórmula para os deslocamentos teve seus coeficientes alterados e assim o algoritmo continua determinando exatamente a velocidade de uma partícula submetida a uma força resultante cúbica no tempo. Devido à alteração dos coeficientes de (3.45b) para (3.56b) os deslocamentos são exatos apenas para forças quadráticas no tempo.

Substituindo as expressões (3.45) pelas expressões (3.56) as matrizes na equação (3.51) passam a ser:

$$\underline{\underline{D}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} + \frac{\tau^2}{6} \underline{\underline{K}} + \frac{\tau^3}{24} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \frac{\tau^2}{6} \underline{\underline{C}} - \frac{\tau^3}{24} (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}}) \\ \frac{\tau}{2} \underline{\underline{K}} + \frac{\tau^2}{12} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{M}} + \frac{\tau}{2} \underline{\underline{C}} - \frac{\tau^2}{12} (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}}) \end{bmatrix} \quad (3.57a)$$

$$\underline{\underline{D}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} - \frac{\tau^2}{3} \underline{\underline{K}} + \frac{\tau^3}{24} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \tau \underline{\underline{M}} - \frac{\tau^2}{3} \underline{\underline{C}} - \frac{\tau^3}{24} (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}}) \\ -\frac{\tau}{2} \underline{\underline{K}} + \frac{\tau^2}{12} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} & \underline{\underline{M}} - \frac{\tau}{2} \underline{\underline{C}} - \frac{\tau^2}{12} (\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{C}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{C}}) \end{bmatrix} \quad (3.57b)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{3} \tilde{I} - \frac{\tau^3}{24} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} & \frac{\tau^2}{6} \tilde{I} + \frac{\tau^3}{24} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \\ \frac{\tau}{2} \tilde{I} - \frac{\tau^2}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} & \frac{\tau}{2} \tilde{I} + \frac{\tau^2}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{24} (\dot{\tilde{F}}_0 - \dot{\tilde{F}}_1) \\ \frac{\tau^2}{12} (\dot{\tilde{F}}_0 - \dot{\tilde{F}}_1) \end{bmatrix} \quad (3.57c)$$

O operador de integração para o caso de um grau de liberdade se escreve agora:

$$\tilde{A} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{12} + \frac{\omega^4 \tau^4}{144}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{5}{12} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{144} \omega^4 \tau^4 & \tau(1 - \frac{1}{12} \omega^2 \tau^2) \\ -\omega^2 \tau(1 - \frac{1}{12} \omega^2 \tau^2) & 1 - \frac{5}{12} \omega^2 \tau^2 + \frac{1}{144} \omega^4 \tau^4 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Os autovalores da matriz  $\tilde{A}$  são complexos e de módulo unitário ( $\lambda = e^{\pm i\phi}$ ) para qualquer intervalo de integração  $\tau$  adotado e  $\phi$  é tal que :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega \tau (1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{12})}{(1 - \frac{5}{12} \omega^2 \tau^2 + \frac{\omega^4 \tau^4}{144})} \quad (3.59)$$

Dessa maneira o intervalo de integração passa a ser escolhido de acordo com a distribuição espacial do carregamento e seu conteúdo de frequências, sem a preocupação com a instabilidade do algoritmo na avaliação da resposta correspondente aos modos mais altos.

Note-se que o algoritmo obtido com a interpolação linear das forças de inércia é também apenas condicionalmente estável:  $\tau < 0.551 T_0$  (Newmark  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{6}$ ) .

É interessante notar que é possível modificá-lo de maneira a torná-lo incondicionalmente estável e o algoritmo resultante [3] é o método da aceleração média constante da família de Newmark, equações (3.33), com  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$ . Como alternativa de solução das equações obtidas a partir da interpolação cúbica das forças de inércia (3.45) ou (3.56), que não dobre o número de equações do problema e trabalhe com matrizes simétricas, está a solução iterativa que é usada nos problemas não lineares e será vista adiante.

A partir da definição de erro relativo no período é possível traçar curvas (Fig. 3.1) que relacionem esse erro (expresso em percentagem) com o parâmetro  $\tau/T_0$  para os algoritmos apresentados.

A fig. 3.1 foi retirada da referência [2]

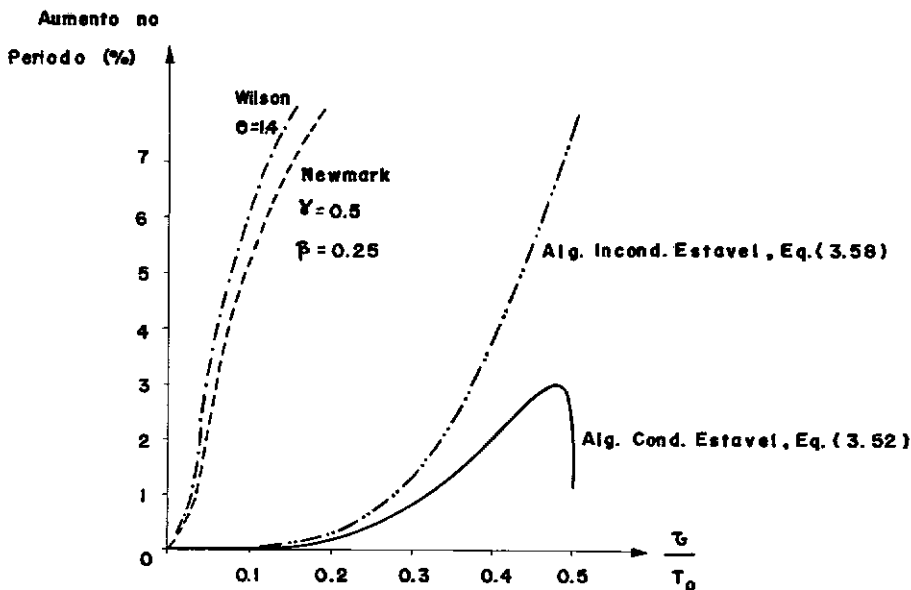


FIG. 3.1

## ii) Problemas Não-Lineares

Devido à não-linearidade na relação entre as forças elásticas  $\underline{R}_E$  e os deslocamentos  $\underline{u}$  a equação de movimento se escreverá:

$$\underline{\ddot{R}} = \underline{M} \underline{\ddot{u}} = \underline{F}(t) - \underline{C} \dot{\underline{u}} - \underline{R}_E \quad (3.60)$$

onde:

$$\underline{R}_E = \underline{R}_E[\underline{u}(t)] \quad (3.61)$$

Derivando (3.60) em relação ao tempo obtém-se:

$$\dot{\underline{R}} = \underline{M} \underline{\ddot{u}} = \dot{\underline{F}}(t) - \underline{C} \underline{\ddot{u}} - \underline{K}(\underline{u}) \dot{\underline{u}} \quad (3.62)$$

já que:

$$\dot{\underline{R}}_E = \frac{\partial \underline{R}_E}{\partial \underline{u}} \dot{\underline{u}} = \underline{K}(\underline{u}) \dot{\underline{u}} \quad (3.63)$$

Linearizando (3.61) no intervalo de tempo  $\tau$  obtém-se:

$$\underline{R}_{E1} = \underline{R}_{E0} + \underline{K}_0 (\underline{u}_1 - \underline{u}_0) \quad (3.64a)$$

$$\dot{\underline{R}}_{E1} = \underline{K}_0 \dot{\underline{u}}_1 \quad (3.64b)$$

Observe-se que em (3.64b) é mais consistente usar-se a matriz de rigidez tangente avaliada em  $\underline{u}_1$ :  $\underline{K}_1 = \underline{K}(\underline{u}_1)$  no lugar de  $\underline{K}_0 = \underline{K}(\underline{u}_0)$ . Isto não será feito para evitar o armazenamento simultâneo de duas matrizes de rigidez.

A linearização definida pelas expressões (3.64) possibilita uma solução direta para  $\underline{u}_1$  e  $\dot{\underline{u}}_1$  resolvendo um sistema de ordem  $2n$  análogo a (3.48).

Ocorre que para cada intervalo de tempo uma nova triangularização deverá ser feita, já que  $\underline{K}_0$  não é mais constante ao longo do tempo, o que torna o procedimento pouco atrativo.

O algoritmo iterativo que será usado aqui [2] utiliza as equações (3.64) com a matriz  $\underline{K}_0$  substituída por uma matriz tangente modificada:

$$\underline{K}_0^* = \frac{1}{2} [\underline{K}_0 + \underline{K}_1] \quad (3.65)$$

onde  $\underline{K}_1$  é a matriz de rigidez tangente avaliada após algumas iterações com as equações em sua forma original (3.64).

Com o uso da matriz modificada  $\underline{K}_0^*$  é possível, geralmente, se calcular as forças elásticas  $\underline{R}_E$ , ao final de cada intervalo de tempo, por acumulação do valor no início do intervalo,  $\underline{R}_{E0}$ , com o produto  $\underline{K}_0^* (\underline{u}_1 - \underline{u}_0)$ , em vez de se recalculer  $\underline{R}_E$  a partir dos deslocamentos finais  $\underline{u}_1$ .

O esquema iterativo é descrito a seguir.

Inicialmente o vetor das forças de inércia  $\underline{R}_1$  e sua derivada  $\dot{\underline{R}}_1$  ao final do intervalo de tempo são estimados por uma fórmula "predictor"; no caso:

$$\dot{\underline{R}}_1 = \dot{\underline{R}}_0 \quad (3.66a)$$

$$\underline{R}_1 = \underline{R}_0 + \tau \dot{\underline{R}}_0 \quad (3.66b)$$



Esses valores são levados às expressões (3.44) obtendo-se uma primeira aproximação para  $\underline{u}_1$ ,  $\dot{\underline{u}}_1$  e  $\ddot{\underline{u}}_1 = \underline{M}^{-1} \underline{R}_1$ .

Novos valores para  $\underline{R}_1$  e  $\dot{\underline{R}}_1$  podem ser agora calculados por:

$$\underline{R}_1 = \underline{F}_1 - \underline{R}_{E0} - \underline{K}_0 (\underline{u}_1 - \underline{u}_0) - \underline{C} \dot{\underline{u}}_1 \quad (3.67a)$$

$$\dot{\underline{R}}_1 = \dot{\underline{F}}_1 - \underline{K}_0 \dot{\underline{u}}_1 - \underline{C} \ddot{\underline{u}}_1 \quad (3.67b)$$

e levados novamente a (3.44) para a obtenção de uma nova aproximação para  $\underline{u}_1$ ,  $\dot{\underline{u}}_1$  e  $\ddot{\underline{u}}_1$ .

O processo se repete até ser satisfeito o critério de convergência adotado.

Ressalte-se que, após algumas iterações,  $\underline{K}_0$  nas expressões (3.67) é substituída por  $\underline{K}_0^*$ , já definida anteriormente. As condições ao final do intervalo de tempo são tomadas como condições iniciais para o próximo intervalo e o processo se repete até ser completada a resposta no tempo.

A convergência do processo iterativo descrito será estudada mais adiante.

O processo iterativo pode ser aplicado também a problemas lineares desde que se use sempre as expressões (3.46) no lugar de (3.67).

Observando-se as operações:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_1 = \underline{R}_1 \quad (3.68a)$$

$$\underline{M}(\dot{\underline{u}}_1 - \dot{\underline{u}}_0) = \frac{\tau}{12} (6 \underline{R}_0 + \tau \dot{\underline{R}}_0 + 6 \underline{R}_1 - \tau \dot{\underline{R}}_1) \quad (3.68b)$$

$$\ddot{M}(\underline{u}_1 - \underline{u}_0 - \tau \dot{\underline{u}}_0) = \frac{\tau^2}{60} (21 \underline{R}_0 + 3 \tau \dot{\underline{R}}_0 + 9 \underline{R}_1 - 2 \tau \dot{\underline{R}}_1) \quad (3.68c)$$

que são efetuadas a cada iteração, nota-se que, para matrizes de massa constantes no tempo, apenas uma triangularização da matriz de massa é feita.

Observe-se também que as matrizes, ao contrário da equação (3.48), conservam a ordem  $n$  e são simétricas o que é vantajoso tanto no ponto de vista de memória interna quanto de tempo de processamento.

Duas alternativas existem então para problemas lineares:

- usar o algoritmo modificado incondicionalmente estável através da equação (3.51), de ordem  $2n$ , com um intervalo de integração função do problema específico.
- usar o algoritmo condicionalmente estável, iterativo, com um intervalo de tempo definido pelo critério de convergência do processo iterativo.

Tudo indica que a primeira alternativa seria preferível no caso em que os modos mais baixos dominam a resposta, já que intervalos de integração maiores poderiam ser usados.

Para problemas de transientes curtos, como choques e respostas ricas em frequências, que requerem intervalos de integração da ordem de grandeza do período mínimo do modelo discreto, a segunda alternativa é a indicada.

O algoritmo correspondente à primeira alternativa ainda não foi aplicado a grandes sistemas estruturais embora proporcione, nos exemplos apresentados em [3], resultados mais precisos do que os obtidos com o método de Wilson.

Para analisar a convergência do processo iterativo substitui-se as expressões (3.45) e (3.47) em (3.67) obtendo-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{R}}_1 \\ \tilde{R}_1 \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \\ \tilde{B}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tau^2}{12} \tilde{K}_0 \tilde{M}^{-1} & - \left( \frac{6\tau}{12} \tilde{K}_0 \tilde{M}^{-1} + \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \right) \\ \frac{2\tau^3}{60} \tilde{K}_0 \tilde{M}^{-1} + \frac{\tau^2}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} & - \left( \frac{9\tau^2}{60} \tilde{K}_0 \tilde{M}^{-1} + \frac{6\tau}{12} \tilde{C} \tilde{M}^{-1} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{R}}_1 \\ \tilde{R}_1 \end{bmatrix}^i \quad (3.69)$$

onde:

$$\tilde{A}_0 = - \tilde{K}_0 \left[ \dot{\tilde{u}}_0 + \frac{\tau}{12} \tilde{M}^{-1} (6 \tilde{R}_0 + \tau \dot{\tilde{R}}_0) \right] + \dot{\tilde{F}}_1 \quad (3.70a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0 = & - \tilde{R}_{EO} - \tilde{K}_0 \left[ \tau \dot{\tilde{u}}_0 + \frac{\tau^2}{60} \tilde{M}^{-1} (21 \tilde{R}_0 + 3 \tau \dot{\tilde{R}}_0) \right] - \\ & - \tilde{C} \left[ \dot{\tilde{u}}_0 + \frac{\tau}{12} \tilde{M}^{-1} (6 \tilde{R}_0 + \tau \dot{\tilde{R}}_0) \right] + \tilde{F}_1 \end{aligned} \quad (3.70b)$$

que representa o processo iterativo:

$$\tilde{R}^{i+1} = \tilde{P} + \tilde{A} \tilde{R}^i \quad (3.71)$$

onde  $\tilde{A}$  é a matriz de iteração.

A condição necessária e suficiente para se obter convergência nesse processo é que os módulos dos autovalores da matriz  $\tilde{A}$  sejam limitados pela unidade [46].

Procurando alcançar resultados mais úteis do que aqueles apresentados em [2], a convergência será estudada para o caso de um sistema massa-mola com amortecimento.

Nesse caso a matriz  $\tilde{A}$  se escreve:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a \frac{\tau^2}{12} & - (a \frac{6\tau}{12} + b) \\ a \frac{2\tau^3}{60} + b \frac{\tau^2}{12} & - (a \frac{9\tau^2}{60} + b \frac{6\tau}{12}) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

onde, por simplicidade, se tomou:

$$a = K M^{-1} \quad (3.73a)$$

$$b = C M^{-1} \quad (3.73b)$$

os autovalores de  $\tilde{A}$  são complexos conjugados:

$$\lambda = \frac{1}{60} (-2 a \tau^2 - 15 b \tau) \pm \frac{1}{60} \left[ 11 a^2 \tau^4 + 60 ab \tau^3 + 75 b^2 \tau^2 \right]^{\frac{1}{2}} i \quad (3.74)$$

Desde que se verifique:

$$11 a^2 \tau^4 + 60 ab \tau^3 + 75 b^2 \tau^2 > 0 \quad (3.75)$$

o que sempre ocorre nos casos de amortecimento positivo ( $b > 0$ ).

O modulo dos autovalores é então:

$$|\lambda| = \rho = \frac{1}{60} \left[ 15 a^2 \tau^4 + 120 ab \tau^3 + 300 b^2 \tau^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.76a)$$

A expressão acima pode ainda se escrever:

$$240 \rho^2 = a^2 \tau^4 + 8 ab \tau^3 + 20 b^2 \tau^2 \quad (3.76b)$$

relacionando o módulo dos autovalores da matriz de iteração com as características do sistema, eq. (3.73), e o intervalo de tempo adotado  $\tau$ .

Nesse ponto é interessante introduzir as relações:

$$a = K M^{-1} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad (3.77a)$$

$$\tau = \theta T \quad (3.77b)$$

e tomar o amortecimento como uma fração do amortecimento crítico:

$$C = \xi C_{\text{crit.}} = \xi 2 M \omega \quad (3.77c)$$

O parâmetro  $b$  passa a se escrever:

$$b = C M^{-1} = 2 \xi \omega = \frac{4\pi}{T} \xi \quad (3.77d)$$

Substituindo-se o conjunto de relações (3.77) em (3.76b) obtém-se:

$$\xi^2 + \frac{2}{5} \pi \theta \xi + \frac{\pi^2 \theta^2}{20} - \frac{3 \rho^2}{4 \pi^2 \theta^2} = 0 \quad (3.78)$$

que relaciona a taxa de amortecimento  $\xi$  e o parâmetro  $\theta$  com o módulo dos autovalores de  $\underline{A}$ .

As raízes da equação do 2º grau em  $\xi$  (3.78) são:

$$\xi_{1,2} = -\frac{\pi \theta}{5} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \rho^2}{\pi^2 \theta^2} - \frac{\pi^2 \theta^2}{25}} \quad (3.79)$$

A condição para que o módulo dos autovalores de  $\underline{A}$  seja limitado por  $\rho$  acarreta:

$$\xi^2 + \frac{2}{5} \pi \theta \xi + \frac{\pi^2 \theta^2}{20} - \frac{3 \rho^2}{4 \pi^2 \theta^2} \leq 0 \quad (3.80)$$

o que ocorre para os valores de  $\xi$  no intervalo entre as raízes  $\xi_1$  e  $\xi_2$  da equação (3.78).

Introduzindo-se agora o conjunto de relações (3.77) na desigualdade (3.75) obtém-se:

$$\xi^2 + \frac{4 \pi \theta}{5} \xi + \frac{11}{75} \pi^2 \theta^2 \geq 0 \quad (3.81)$$

A expressão acima se anula em:

$$\xi_{1,2} = \pi \theta \left( -\frac{2}{5} \pm \frac{\sqrt{3}}{15} \right) \quad (3.82)$$

Portanto a região de autovalores complexos é aquela onde a desigualdade (3.81) se verifica:

$$\xi < \xi_1 = -1.61939 \theta \quad (3.83a)$$

$$\xi > \xi_2 = -0.89388 \theta \quad (3.83b)$$

Fora dessa região os autovalores de  $\tilde{A}$  são reais da forma:

$$\lambda = \frac{1}{60} (-8 \pi^2 \theta^2 - 60 \pi \theta \xi) \pm \frac{1}{60} \left[ -176 \pi^4 \theta^4 - 960 \pi^3 \theta^3 \xi - 1200 \pi^2 \theta^2 \xi^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

A condição para que tais autovalores tenham módulo igual a  $\rho$  é:

$$\begin{aligned}
 1200(2\pi)^2 \theta^2 \xi^2 + \left[ 3600(2\pi) \rho \theta + 240(2\pi)^3 \theta^3 \right] \xi + \\
 + \left[ 3600 \rho^2 + 240(2\pi)^2 \rho \theta^2 + 15(2\pi)^4 \theta^4 \right] = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

Essa equação não foi resolvida explicitamente, porém, para cada par de valores  $\rho$  e  $\theta$  na região de interesse, é possível calcular raízes  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

Os resultados obtidos até aqui podem ser visualizados fazendo-se sua representação no semi-plano  $\xi - \theta$  ( $\theta > 0$ ), na figura 3.2 onde apenas o caso limite de convergência,  $\rho = 1$ , está representado.

A partir das semi-retas  $\overrightarrow{OC}$  e  $\overrightarrow{OB}$  cujas equações são, respectivamente:

$$\xi = - 1.61939 \theta \tag{3.86a}$$

$$\xi = - 0.89388 \theta \tag{3.86b}$$

Definem-se as regiões:

- autovalores reais: região interior às semi-retas  $\overrightarrow{OC}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .
- autovalores complexos: região externa dada pelas desigualdades (3.83)

Na região de autovalores complexos as curvas A1 e A2 são a representação das raízes  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , respectivamente, dadas pela expressão (3.79), no caso limite  $\rho = 1$ .

Essas curvas tendem assintoticamente para o eixo  $\theta = 0$ . Cada ramo da bifurcação que se observa entre B e C corresponde à condição de um dos dois autovalores reais de A apre

sentar módulo unitário.

Dessa maneira a região de convergência é aquela interior às curvas  $A_1$  e  $A_2$  e ao ramo inferior da bifurcação entre  $B$  e  $C$ .

Para valores de  $\rho < 1$  obtêm-se curvas semelhantes e interiores a  $A_1$  e  $A_2$ , cada vez mais próximas da origem, com a propriedade de se encontrarem sempre sobre a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  cuja equação:

$$\xi = -\frac{\pi}{5} \theta \quad (3.87)$$

é obtida a partir de (3.79).

Para o caso de amortecimento positivo a figura 3.3 mostra as curvas  $A_1$  para alguns valores de  $\rho$ .

No problema não amortecido a situação se simplifica. Fazendo-se  $\xi = 0$  em (3.78) obtêm-se:

$$\rho = \frac{\pi^2}{\sqrt{15}} \theta^2 \quad (3.88)$$

que dá origem ao gráfico da figura 3.4.

O valor limite de  $\theta$  para que haja convergência corresponde ao caso  $\rho = 1$  e, de (3.88) obtêm-se:

$$\theta_{\text{crit.}} = 0.626 \quad (3.89)$$

e o intervalo de integração deverá ser:

$$\tau \leq 0.626 \ T \quad (3.90)$$

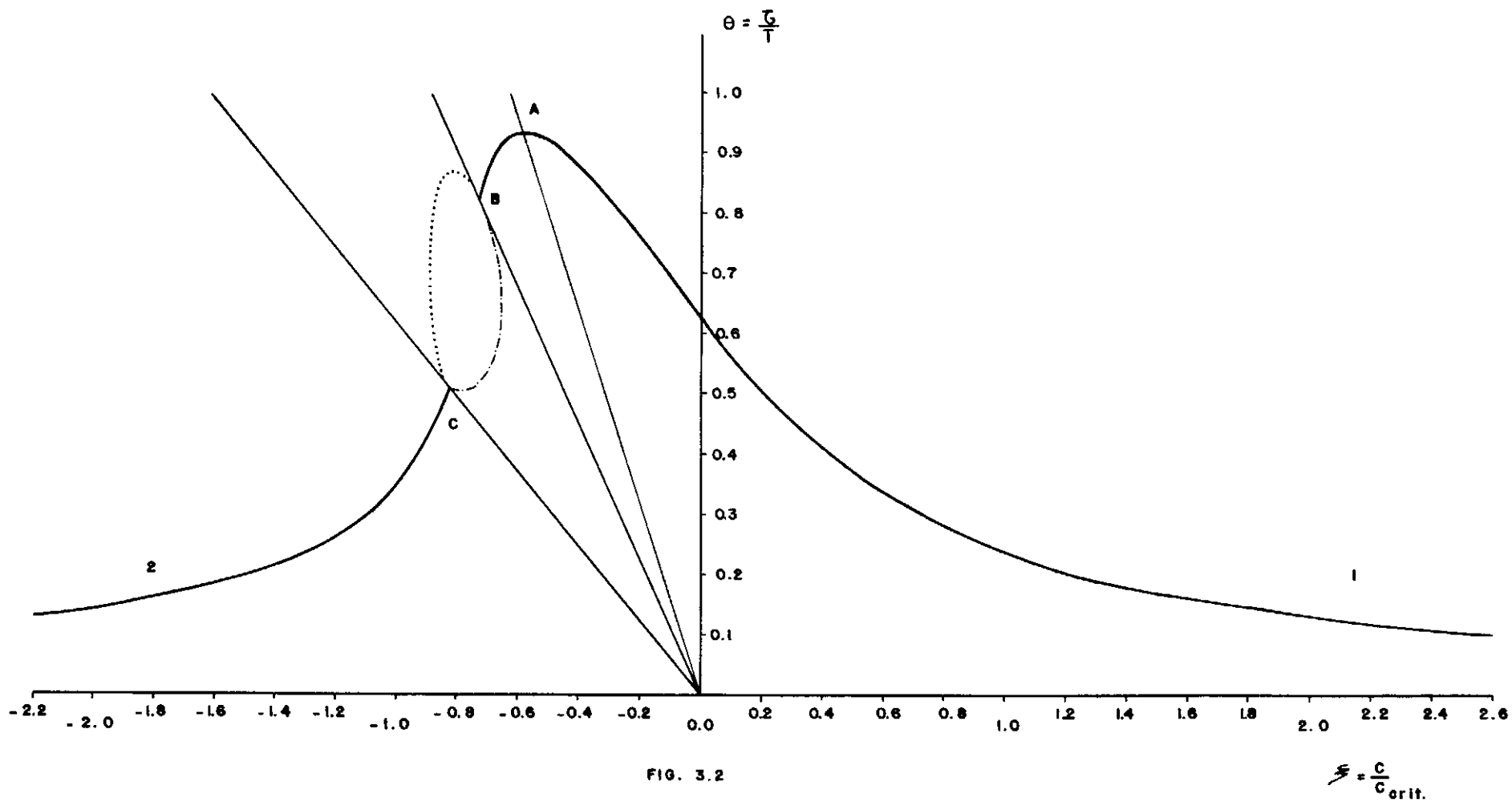


Observe-se que a convergência em um intervalo de tempo é mais rápida a medida que se diminui  $\tau$  (fig. 3.2, 3.3), porém isto acarreta um número maior de intervalos de integração para se descrever o mesmo intervalo total.

Para cada problema específico deverá existir então um intervalo de integração ótimo, com relação ao tempo de execução, que pode ser determinado por tentativas a partir de (3.90).

Normalmente, este intervalo de tempo atende também à condição de estabilidade, eq. (3.55).

As conclusões relativas à convergência, obtidas aqui, podem ser extendidas ao caso não-linear levando-se em conta que a matriz de iteração  $\underline{A}$ , devido à variação da rigidez da mola, será apenas seccionalmente constante ao longo da integração.



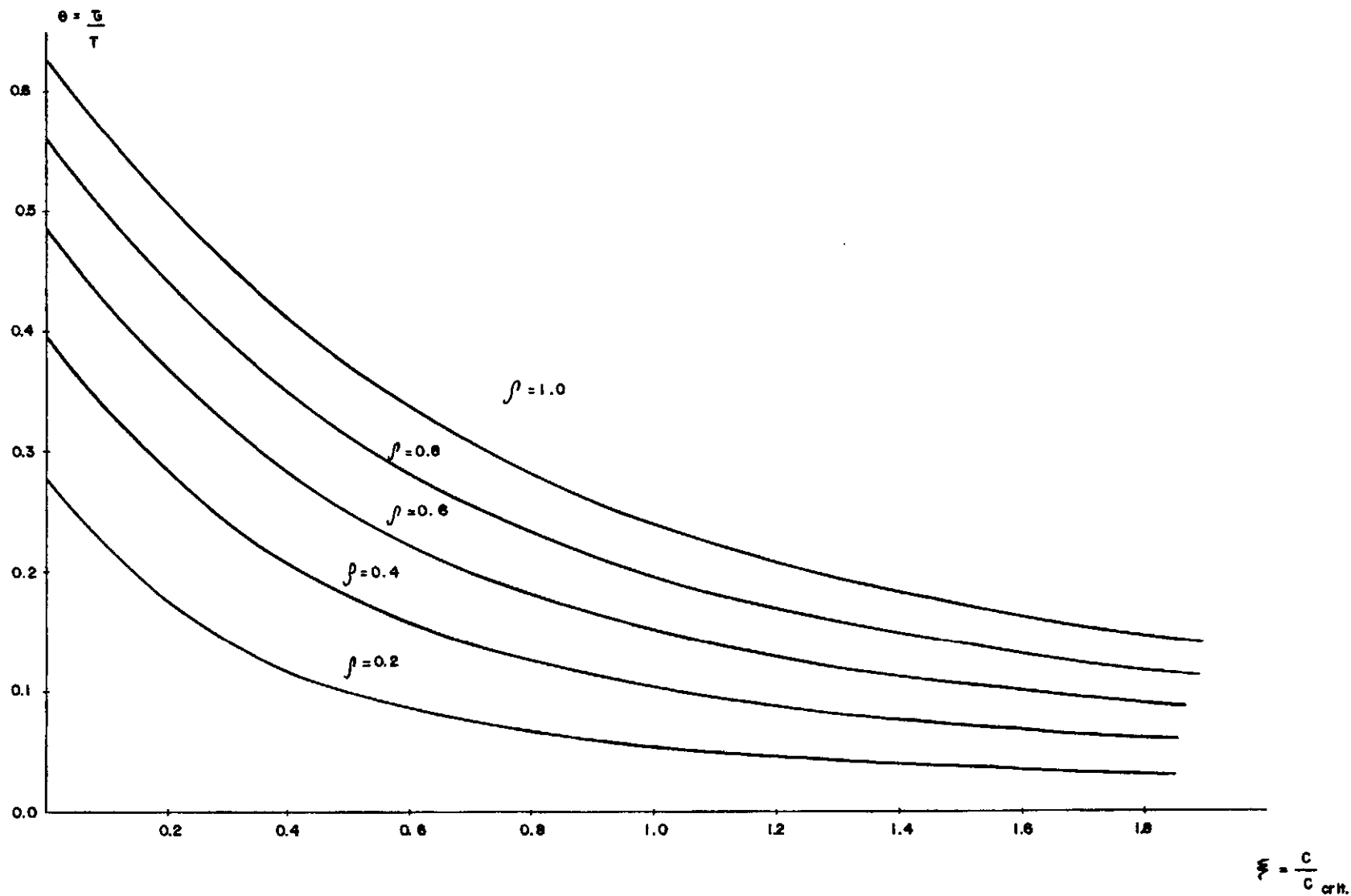


FIG. 3.3

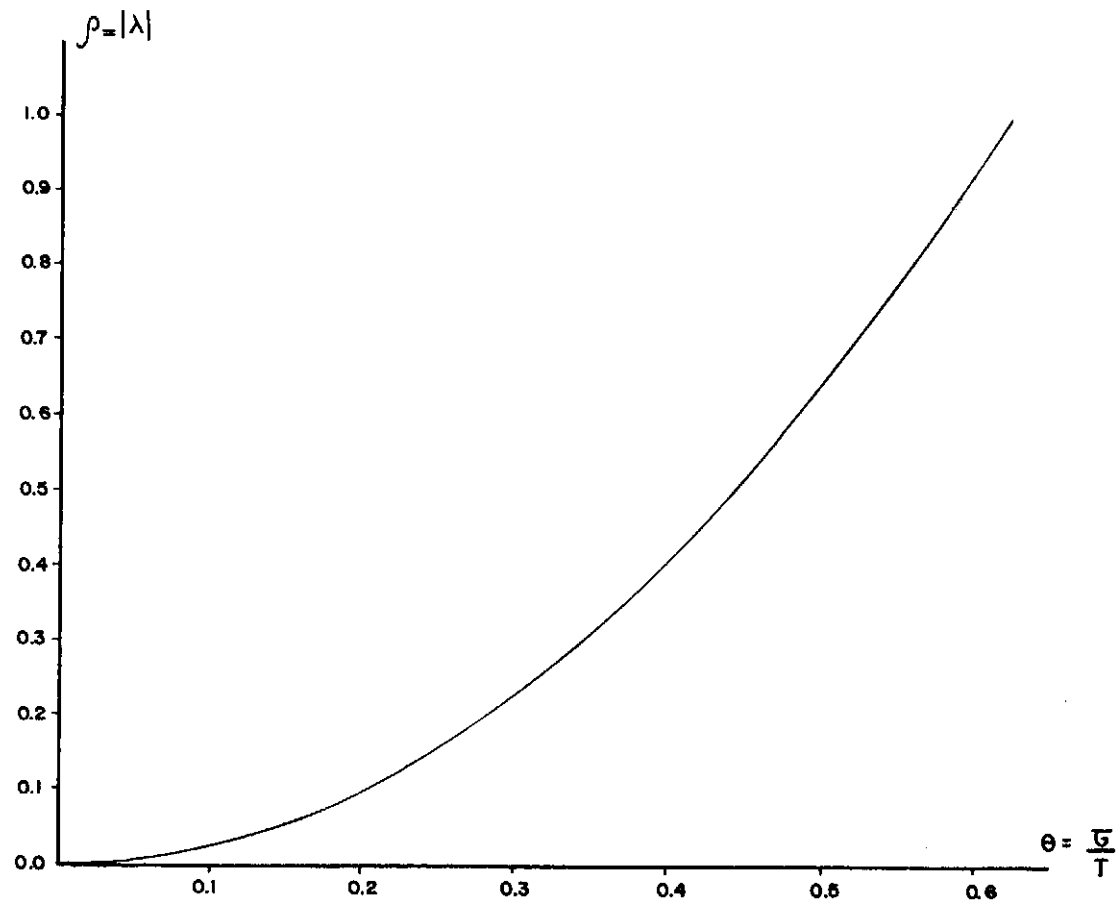


FIG. 3.4

## IV - PROCEDIMENTOS IMPLEMENTADOS - EXEMPLOS - CONCLUSÕES

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita a aplicação do algoritmo condicionalmente estável, obtido pela interpolação cúbica das forças de inércia, visto no capítulo anterior, ao caso da resposta dinâmica de estruturas reticuladas submetidas a solicitações de natureza determinista.

Adotou-se o processo iterativo que usa a matriz de rigidez tangente modificada  $\underline{K}_0^*$  e é considerado o caso da não-linearidade geométrica.

As equações de movimento são obtidas a partir do princípio de Hamilton com a discretização espacial feita pelo método dos elementos finitos.

4.2 - ELEMENTOS IMPLANTADOS

Foram implantados cinco tipos de elementos finitos derivados de dois tipos básicos: o pórtico plano e a treliça espacial. São identificados, no programa, pela variável ITIPO :

ITIPO = 1 - Pórtico Plano

ITIPO = 2 - Treliça Plana

ITIPO = 3 - Cabo Plano

ITIPO = 4 - Treliça Espacial

ITIPO = 5 - Cabo Espacial

Os elementos de cabo são usados apenas em análise não-linear e diferem dos elementos de treliça somente no fato de não oferecerem resistência à compressão. Suas matrizes de rigidez são relacionadas por:

$$\tilde{K}^{\text{cabo}} = H(\epsilon_x) \tilde{K}^{\text{treliça}} \quad (4.1)$$

onde  $H(\epsilon_x)$  é a função degrau de Heaviside:

$$\begin{aligned} H(\epsilon_x) &= 0 & \epsilon_x < 0 \\ H(\epsilon_x) &= 1 & \epsilon_x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

e  $\epsilon_x = (\ell - \ell_o) / \ell_o$  é a deformação unitária do elemento no instante considerado.

Os elementos podem ser combinados em dois grupos :

- a) elementos dos tipos 1, 2 e 3
- b) elementos dos tipos 4 e 5

permitindo a análise de pórticos planos enrijecidos com cabos e/ou elementos de treliça, estruturas planas formadas por elementos de cabo e/ou treliça (a) e estruturas espaciais formadas por elementos de cabo e/ou treliça (b) .

As matrizes de massa são idênticas para os elementos de cabo e treliça.

Todos os elementos apresentam matrizes de ordem  $6 \times 6$  correspondentes a 3 graus de liberdade por nó. Os elementos planos de treliça e cabo tem as suas matrizes com as linhas e colunas correspondentes ao terceiro grau de liberdade nulas para poderem ser combinados diretamente com elementos de pórtico plano.

No que se segue, apenas serão mostradas as expressões correspondentes aos elementos básicos: pórtico plano e treliça espacial.

#### 4.2.1 - Matrizes de Massa

As matrizes de massa dos elementos surgem, quando da aplicação do princípio de Hamilton, a partir da expressão da energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu \bar{v}^2 dV \quad (4.3)$$

onde:

$\mu$  - massa específica do material

$\bar{v}$  = velocidade do elemento  $dV$

$V$  = volume do elemento finito

##### a) Elemento de Pórtico Plano

Considera-se o elemento de pórtico plano de eixo reto de comprimento  $L$  e seção transversal constante de área  $A$ , simétrica em relação ao plano de carregamento.

Supondo-se a conservação das seções planas durante a flexão e desprezando-se a deformação por cisalhamento tem-se para o deslocamento longitudinal dos pontos de ordenada  $z$  em relação ao centro de gravidade da seção:

$$u = u^* - z \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.4)$$

onde  $u^* = u|_{z=0}$  é o deslocamento longitudinal do C.G. da seção transversal e  $v$  é o deslocamento transversal da seção.

A energia cinética (4.3) se escreve:

$$T = \frac{1}{2} \int_L \int_A \mu (\dot{v}^2 + \dot{u}^2) dA dx \quad (4.5)$$

Levando (4.4) a (4.5) e integrando-se sobre a área da seção transversal obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} \mu A \int_L \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \mu A \int_L \dot{u}^{*2} dx + \frac{1}{2} \mu J \int_L \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right]^2 dx \quad (4.6)$$

onde  $J$  é o momento de inércia da seção, e a energia cinética total está separada em parcelas que correspondem, respectivamente, às translações vertical e horizontal e à rotação da seção transversal.

Introduzindo as funções de interpolação:

$$u^* = \underline{N}_u \underline{q} \quad (4.7a)$$

$$v = \underline{N}_v \underline{q} \quad (4.7b)$$

na expressão da energia cinética (4.6) obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} \mu \int_L \dot{\underline{q}}^T \left\{ A \left[ \underline{N}_v^T \underline{N}_v + \underline{N}_u^T \underline{N}_u \right] + J \left[ \underline{N}_{v,x}^T \underline{N}_{v,x} \right] \right\} \dot{\underline{q}} dx \quad (4.8)$$

onde  $\underline{N}_{v,x} = \frac{d}{dx} \underline{N}_v$ .

Desenvolvendo-se a parcela:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \quad (4.9)$$

do princípio de Hamilton tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mu \int_L \left\{ A \left[ \underline{N}_v^T \underline{N}_v + \underline{N}_u^T \underline{N}_u \right] + J \left[ \underline{N}_{v,x}^T \underline{N}_{v,x} \right] \right\} dx \dot{\underline{q}} \delta \dot{\underline{q}} dt \quad (4.10)$$

que, integrada por partes, resulta em:



$$\int_{t_1}^{t_2} \mu \int_L \{ A [\underline{N}_v^T \underline{N}_v + \underline{N}_u^T \underline{N}_u] + J [\underline{N}_{v,x}^T \underline{N}_{v,x}] \} dx \ddot{\underline{q}} \delta \underline{q} dt \quad (4.11a)$$

ou ainda:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^e \ddot{\underline{q}} \delta \underline{q} dt \quad (4.11b)$$

onde  $\underline{M}^e$  é a matriz de massa, já que, pelo princípio de Hamilton:

$$\delta \underline{q} \Big|_{t_1} = \delta \underline{q} \Big|_{t_2} = 0 \quad (4.12)$$

Empregando-se funções de interpolação de Hermite, lineares para o deslocamento  $u^*$  :

$$\underline{N}_u = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13a)$$

e cúbicas para o deslocamento transversal  $v$  :

$$\underline{N}_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3(\frac{x}{L})^2 + 2(\frac{x}{L})^3 & x(1 - \frac{x}{L})^2 & 0 & 3(\frac{x}{L})^2 - 2(\frac{x}{L})^3 & \frac{x^2}{L}(\frac{x}{L} - 1) \end{bmatrix} \quad (4.13b)$$

e considerando os deslocamentos nodais  $\underline{q}$  segundo a fig. (4.1):

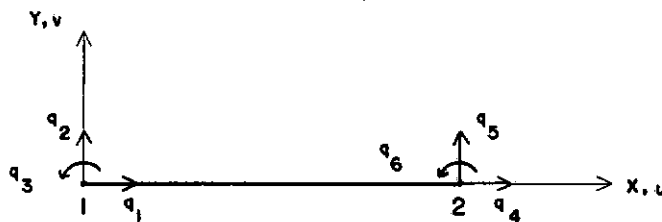


FIG. 4.1

obtêm-se a matriz de massa consistente para o elemento de pórtico plano:

$$\tilde{M}^e = \mu AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{13}{35} & \frac{11}{210} L & 0 & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} L \\ & & \frac{1}{105} L^2 & 0 & \frac{13}{420} L & -\frac{1}{140} L^2 \\ & & & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \text{S I M .} & & & & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} L \\ & & & & & \frac{1}{105} L^2 \end{bmatrix} + \mu J \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{S I M .} & & & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

(4.14)

onde a primeira parcela corresponde à inércia de translação e a segunda à inércia de rotação.

A matriz de massa é dita consistente quando são usadas na avaliação da energia cinética as mesmas funções de interpolação que são utilizadas no cálculo da energia de deformação no princípio de Hamilton.

O conceito de matriz de massa consistente se deve a Archer [29] e antes desse seu trabalho apenas matrizes de massa diagonais, obtidas concentrando-se massas nos pontos nodais, eram empregadas.

A formulação consistente mantém a propriedade do método de Ritz de fornecer as frequências do modelo discreto sempre mais altas do que os valores exatos.

Entre as matrizes de massa não consistentes, são de particular interesse aquelas que se apresentam em forma diagonal já que tornam explícito o algoritmo de integração aqui empre-

gado. Ressalte-se também que as matrizes consistentes sempre acarretam maior esforço computacional mas nem sempre levam a melhores resultados [9, 22, 24] .

O procedimento descrito em [22] é aplicado também em [24] para a obtenção de uma matriz de massa diagonal para elementos isoparamétricos quadráticos resume-se em distribuir a massa total do elemento proporcionalmente aos coeficientes da diagonal principal da matriz consistente do elemento.

A matriz de massa diagonal para o elemento de pórtico plano empregada nesse trabalho é obtida a partir da matriz consistente segundo o procedimento, descrito em [21], que se escreve:

$$\begin{aligned}
 m_{11}^D &= m_{11} + m_{14} \\
 m_{22}^D &= m_{22} + m_{25} \\
 m_{33}^D &= m_{33} + m_{36} \\
 m_{44}^D &= m_{41} + m_{44} \\
 m_{55}^D &= m_{52} + m_{55} \\
 m_{66}^D &= m_{36} + m_{66}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

A matriz resultante é:

$$\begin{aligned}
 \tilde{M}^e &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mu AL & \frac{1}{2} \mu AL & \frac{1}{420} \mu AL^3 & \frac{1}{2} \mu AL & \frac{1}{2} \mu AL & \frac{1}{420} \mu AL^3 \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{10} \mu JL & 0 & 0 & \frac{1}{10} \mu JL \end{bmatrix} \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

onde a segunda parcela provém da inércia de rotação.

No programa em apêndice duas variáveis, MASSA e INROT, controlam a construção da matriz de massa da estrutura de acordo com os valores que assumem:

- MASSA = 1 - é montada a matriz de massa consistente
- MASSA = 2 - é montada a matriz de massa diagonal
- MASSA = 3 - no caso da matriz de massa global ser diagonal porém construída a partir de elementos escalares ligados pelo programa. Nesse caso a massa específica dos elementos MESP(I) deve ser nula.
- INROT = 0 - não é levada em conta a parcela correspondente à inércia de rotação na montagem das matrizes consistentes ou diagonais dos elementos.
- INROT  $\neq$  0 - a parcela de inércia de rotação é considerada.

Observe-se que, em todos os casos, são ainda levadas em consideração as massas discretas introduzidas como elementos escalares pela matriz ED(I, J) conforme o item 4.3.

#### b) Elemento de Treliça Espacial

A matriz de massa para o elemento de treliça espacial pode ser obtida utilizando-se a expressão da energia cinética:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (4.17)$$

onde u, v e w são as componentes do deslocamento segundo as direções usuais x, y e z, e as funções de interpolação:

$$\begin{aligned}
 u &= \underline{N}_u \underline{q} \\
 v &= \underline{N}_v \underline{q} \\
 w &= \underline{N}_w \underline{q}
 \end{aligned}
 \quad (4.18)$$

Levando-se (4.18) a (4.17) e por procedimentos análogos aos já vistos no caso do elemento de pórtico plano obtêm-se a matriz de massa do elemento de treliça espacial:

$$\underline{\underline{M}}^e = \frac{1}{2} \mu \int_V \left[ \underline{N}_u^T \underline{N}_u + \underline{N}_v^T \underline{N}_v + \underline{N}_w^T \underline{N}_w \right] dV \quad (4.19)$$

Empregando-se as funções de interpolação de Hermite lineares para os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  e adotando-se os deslocamentos nodais segundo a fig. 4.2:

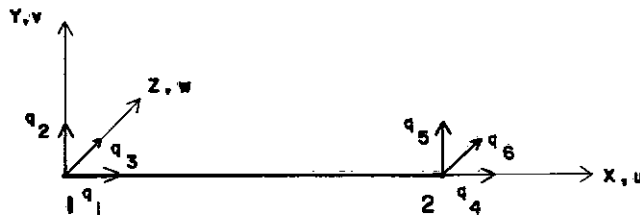


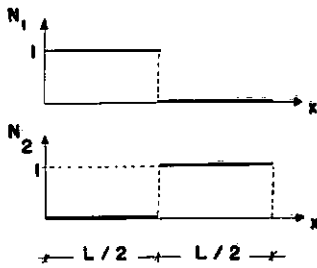
FIG. 4.2

obtêm-se a matriz de massa consistente do elemento:

$$\underline{\underline{M}}^e = \mu AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

S I M .

A construção de uma matriz diagonal é óbvia, nesse caso, bastando alocar metade da massa total do elemento a cada um dos nós. A mesma matriz pode ser obtida substituindo-se as funções de interpolação lineares (4.13a) por funções degrau de Heaviside, fig. 4.3.



$$N_1 = H(x) - H(x - \frac{L}{2}) \quad (4.20a)$$

$$N_2 = H(x - \frac{L}{2}) \quad (4.20b)$$

FIG. 4.3

Ainda a mesma matriz é obtida adotando-se o procedimento usado anteriormente no caso do pórtico plano.

A matriz resultante é:

$$\tilde{M}^e = \mu AL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

#### 4.2.2 - Matrizes de Rigidez

A matriz de rigidez do elemento provém, quando da aplicação do princípio de Hamilton, da parcela  $\delta U$ , energia de deformação associada ao deslocamento virtual  $\delta \underline{u}$ .

Serão deduzidas a matriz de rigidez para o elemento de pórtico plano e, a partir dela, a matriz para o elemento de treliça espacial.

##### a) Elemento de Pórtico Plano

A energia de deformação é definida por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV \quad (4.22)$$

onde:

$\underline{\underline{\epsilon}}$  é o vetor de deformações específicas

$\underline{\underline{\sigma}}$  é o vetor de tensões associado

Para materiais elásticos lineares a relação entre tensões e deformações é dada pela lei de Hooke generalizada:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.23)$$

onde  $\underline{\underline{E}}$  é uma matriz de constantes elásticas e a expressão (4.22) se escreve:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} dV \quad (4.24)$$

De acordo com as hipóteses assumidas no ítem 2.2.1 a respeito do elemento de pórtico, o vetor de deformações específicas se reduz a  $\epsilon_x$  e (4.23) e (4.24) se escrevem:

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (4.25)$$

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \epsilon_x^2 dV \quad (4.26)$$

A partir da expressão da teoria do estado plano de tensões:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.27)$$

Desprezando-se o termo  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  em presença de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e mantendo  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ , já que é a contribuição de ordem mais

baixa de  $v(x)$ , e incluindo deformação por flexão  $-z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  e deformação inicial  $\varepsilon_0$  tem-se [30] :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.28)$$

Substituindo-se (4.28) em (4.26) e assumindo funções de interpolação para os campos de deslocamento:

$$u = \underline{N}_u \underline{q} = N_u^i q^i \quad (4.29a)$$

$$v = \underline{N}_v \underline{q} = N_v^i q^i \quad (4.29b)$$

onde  $\underline{q}$  são os deslocamentos nodais da fig. 3.1 e vale a convenção da soma sobre os índices repetidos, tem-se a energia de deformação expressa em função dos deslocamentos nodais:  $U = U(q_i)$ . Colocando-se a sua variação na forma:

$$\delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} q_j \delta q_i \quad (4.30a)$$

ou, em notação matricial:

$$\delta U = \delta \underline{q}^T \underline{K} \underline{q} \quad (4.30b)$$

chega-se a expressão dos elementos da matriz de rigidez:

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \quad (4.31)$$

Desprezando-se na expressão da energia de deformação (4.26) os termos de grau menor que 2 nos deslocamentos nodais  $\underline{q}$  por não contribuírem para a matriz de rigidez (4.31) obtém-se:



$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} E \int_V \left[ u^2_{,x} + z^2 v^2_{,xx} + \epsilon_0 v^2_{,x} \right] dV + \\
& + \frac{1}{2} E \int_V \left[ \frac{1}{4} v^4_{,x} + u_{,x} v^2_{,x} \right] dV + \\
& + \frac{1}{2} E \int_V \left[ z v_{,xx} (2 u_{,x} + v^2_{,x}) \right] dV
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde as vírgulas denotam derivação.

A última integral é nula. Desprezando-se a segunda integral em presença da primeira, introduzindo-se as funções de interpolação (4.29) e usando a expressão (4.31) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
k_{ij} = & EA \int_L N^i_{u,x} N^j_{u,x} dx + EJ \int_L N^i_{v,xx} N^j_{v,xx} dx + \\
& + EA \epsilon_0 \int_L N^i_{v,x} N^j_{v,x} dx
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Usando-se as funções de interpolação (4.13), tem-se, em forma matricial explícita:

$$\tilde{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{S I M .} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ EJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ & & & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix} + EA \epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2}{15} L & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2}{15} L \end{bmatrix}$$

As duas primeiras parcelas correspondem à matriz de rigidez linear do elemento de pórtico plano e a última parcela é a chamada matriz de rigidez geométrica, onde:

$$N = EA \epsilon_0 \quad (4.35)$$

é o esforço normal calculado no início do intervalo de integração.

#### b) Elemento de Treliça Espacial

Sua matriz de rigidez pode ser obtida pelo procedimento visto anteriormente retirando-se a parcela  $-z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ , correspondente a flexão, na expressão (4.28) e introduzindo o termo  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$ .

Conservando-se apenas os termos quadráticos nos deslocamentos nodais  $\underline{q}$  na expressão da energia de deformação tem-se:

$$U = \frac{1}{2} E \int_V \left[ u^2_{,x} + \epsilon_0 (v^2_{,x} + w^2_{,x}) \right] dV \quad (4.36)$$

Introduzindo-se as funções de interpolação lineares e aplicando a expressão (4.31) obtêm-se, em forma matricial:

explícita:

$$\tilde{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA \epsilon_0}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

#### 4.3 - ELEMENTOS ESCALARES

São chamados de elementos escalares, ou discretos, as molas, amortecedores e massas discretas que podem ser associadas à estrutura nos seus pontos nodais.

No programa implementado, atuam sempre segundo direções globais estando associadas a eles forças elásticas, dissipativas ou de inércia, atuantes nessas mesmas direções.

As molas são supostas lineares de constante  $k_i$  e os amortecedores do tipo viscoso linear de constante  $c_i$ .

As constantes dos elementos escalares ( $m$ ,  $c$ ,  $k$ ) são somadas diretamente ao termo da diagonal principal da matriz global correspondente ( $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$ ), na linha associada à direção em que o elemento atua.

A introdução dos elementos escalares é feita através do vetor  $NO(I)$ , que guarda o número dos nós com elementos escalares, e da matriz  $ED(I, J)$  cuja linha  $I$  armazena as constantes dos elementos do nó de número  $NO(I)$  na seguinte ordem:

$J = 1, 2, 3$  - massas segundo as direções globais 1, 2 e 3

$J = 4, 5, 6$  - constantes dos amortecedores segundo as direções globais 1, 2 e 3 .

$J = 7, 8, 9$  - constantes das molas segundo as direções globais 1, 2 e 3 .

$I$  varia de 1 até NNED : número de nós com algum elemento discreto.

#### 4.4 - MATRIZ DE AMORTECIMENTO

Conforme visto no Ítem 3.2.1 o modelo de amortecimento mais usado é o amortecimento viscoso linear que, introduzido diretamente no modelo discreto, dá origem ao termo  $\underline{\dot{C}} \underline{\dot{u}}$  na equação de movimento (3.13).

Para que o amortecimento seja dito proporcional, a matriz  $\underline{C}$  deverá ser expressa pela série de Caughey [5] :

$$\underline{C} = \underline{M} \sum_i a_i \left[ \underline{M}^{-1} \underline{K} \right]^i \quad (4.38)$$

Em [31] dois processos são apresentados para o cálculo de  $\underline{C}$  . O primeiro determina os coeficientes  $a_i$  de maneira a introduzir uma fração estipulada do amortecimento crítico em cada modo. O segundo, mais direto, expressa a matriz  $\underline{C}$  como uma soma de matrizes, cada uma delas introduzindo o amortecimento desejado em cada modo.

Como a matriz obtida não é em banda, é sugerida em [32] a zeragem dos termos fora de uma certa banda.

Uma forma muito usada para a matriz  $\underline{C}$  é a correspondente ao amortecimento de Rayleigh e pode ser obtida a partir dos dois primeiros termos ( $i = 0$  ,  $i = 1$ ) da série de Caughey:

$$\underline{C} = a_0 \underline{M} + a_1 \underline{K} \quad (4.39)$$

Quando o amortecimento varia sensivelmente ao longo da estrutura é possível [12] se estabelecer diferentes valores de  $a_0$  e  $a_1$  para diferentes regiões da estrutura adotando frações  $\xi$  do amortecimento crítico convenientes. O amortecimento obtido nesse caso não é proporcional.

Muitas vezes é vantajoso, do ponto de vista computacional, o uso de uma matriz de amortecimento diagonal e em [33] são apresentados procedimentos para a sua obtenção.

Em todos os casos os valores numéricos para os fatores de amortecimento em cada modo  $(\xi_i)$  são estimados ou baseados em dados experimentais da estrutura ou de outras estruturas de geometria e materiais semelhantes.

O programa incluído em apêndice apresenta as seguintes alternativas de acordo com o valor assumido pela variável de controle IAMOR:

IAMOR = 1 - Não se considera amortecimento, não sendo efetuadas as operações correspondentes.

IAMOR = 2 - O programa monta a matriz de amortecimento na forma  $\underline{C} = \text{ALFA} * \underline{M} + \text{BETA} * \underline{K}$  onde ALFA e BETA são parâmetros lidos e as matrizes  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$  são globais e calculadas em  $t = 0$ .

São também considerados os amortecedores discretos introduzidos pela matriz ED.

IAMOR = 3 - A matriz de amortecimento, considerada simétrica e de mesma largura de banda de  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$ , é lida como um vetor  $\underline{C}(I)$  que contém apenas os elementos incluídos em sua banda superior.

Uma outra alternativa que pode ser implantada sem maiores dificuldades é a formação de matrizes de amortecimento a nível de elemento da forma  $\underline{C}^e = \text{ALFA} * \underline{M}^e + \text{BETA} * \underline{K}^e$  onde ALFA e BETA são fornecidos para cada elemento. A matriz global seria montada por acumulação como no caso de  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$ .

No caso de se tomar, para um sistema de um grau de liberdade, o amortecimento na forma:

$$c = \alpha m + \beta k \quad (4.40)$$

e exprimindo-o como uma fração  $\xi$  do amortecimento crítico:

$$c = \xi c_{\text{crit.}} = 2 \xi m \omega \quad (4.41)$$

conclui-se, de (4.40) e (4.41), que:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega} + \beta \omega \right) \quad (4.42)$$

Os resultados obtidos a partir do estudo da convergência do processo iterativo no caso linear e para um grau de liberdade podem ser extendidos ao caso de vários graus de liberdade desde que o amortecimento seja do tipo proporcional. Nesse caso o sistema se desacopla e, no modo  $i$ , o amortecimento introduzido é dado por (4.42) com  $\omega = \omega_i$ .

Adotando-se um intervalo de integração  $\tau$  é possível, com o uso da fig. 3.2, verificar se os pontos representativos da integração de cada modo,  $P_i (\xi_i, \theta_i)$ , com:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (4.43a)$$

$$\theta_i = \frac{\tau}{T_i} = \frac{\tau}{2\pi} \omega_i \quad (4.43b)$$

estão na região de convergência.

Normalmente o modo crítico é o modo correspondente à frequência de corte bastando verificar o ponto  $P_n (\xi_n, \theta_n)$  :

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_{\max}} + \beta \omega_{\max} \right) \quad (4.44a)$$

$$\theta_n = \frac{\tau}{2\pi} \omega_{\max} \quad (4-44b)$$

Muitas vezes é necessário adotar um intervalo de integração menor do que o correspondente ao caso não-amortecido o que constitui uma desvantagem inerente ao processo iterativo de solução e não ao algoritmo de integração em si.

#### 4.5 - VETOR DE EXCITAÇÕES EXTERNAS

O vetor  $\underline{\tilde{F}}$  de excitações externas do modelo discreto (3.13) provém, quando da aplicação do princípio de Hamilton, da parcela  $\delta W_{NC}$ , trabalho virtual das forças não conservativas. sua forma geral, a nível de elemento, é:

$$\underline{\tilde{F}}^e = \int_{vol.} \underline{\tilde{N}}^T \underline{\tilde{b}} \, dV + \int_{sup.} \underline{\tilde{N}}^T \underline{\tilde{t}} \, dS \quad (4.45)$$

onde  $\underline{\tilde{b}}$  e  $\underline{\tilde{t}}$  são forças de volume e superfície respectivamente.

O vetor de forças nodais equivalentes  $\underline{\tilde{F}}^e$  é dito consistente se são usadas em (4.45) as mesmas funções de interpolação usadas na expressão da energia de deformação.

Assim, uma formulação é dita consistente quando

são usadas as mesmas funções de interpolação na discretização de todas as parcelas do princípio de Hamilton.

O vetor global  $\underline{F}$  é montado somando-se as contribuições  $\underline{F}^e$  de cada elemento.

Conforme já visto no Capítulo III o algoritmo empregado faz uso dos vetores  $\underline{F}$  e  $\dot{\underline{F}} = \frac{d}{dt} \underline{F}$ .

Ambos os vetores deverão ser montados diretamente no referencial global através da subrotina EXCITA.

São mostradas a seguir as expressões de  $\underline{F}^e$  e  $\dot{\underline{F}}^e$  para um elemento de pórtico plano horizontal percorrido por uma carga móvel concentrada vertical, de valor  $P$ , movendo-se da esquerda para a direita.

Fazendo uso da função  $\delta$  de Dirac o vetor de forças se escreve:

$$\underline{F}^e = \int_0^L \underline{N}_V^T P \delta [x - s(t)] dx \quad (4.46)$$

onde  $s(t)$  é a abscissa da carga medida a partir do nó esquerdo, figura (4.4).



FIG. 4.4

Da definição da função  $\delta$  de Dirac a integral (4.46) se reduz a:

$$\underline{F}^e = P \underline{N}_V^T \Big|_{x=s(t)} \quad (4.47)$$



Derivando-se o vetor  $\tilde{F}^e$  obtem-se:

$$\dot{\tilde{F}}^e = P \frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{c} N_v^T \\ \vdots \end{array} \right]_{x=s(t)} = P \frac{d}{ds} \left[ \begin{array}{c} N_v^T \\ \vdots \end{array} \right]_{x=s(t)} \frac{ds}{dt} \quad (4.48)$$

ou ainda:

$$\dot{\tilde{F}}^e = P v(t) \frac{d}{ds} \left[ \begin{array}{c} N_v^T \\ \vdots \end{array} \right]_{x=s(t)} \quad (4.49)$$

onde  $v(t) = \frac{ds}{dt}$  é a velocidade da carga móvel.

As expressões (4.47) e (4.49) são calculadas automaticamente pela subrotina EXCITA listada em apêndice.

O trecho da estrutura percorrido pela carga móvel deverá ser horizontal e ter seus elementos numerados sequencialmente, da esquerda para a direita, de 1 a NEP (número total de elementos percorridos). Em cada elemento, o nó 1 deverá ser o da esquerda.

#### 4.6 - CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Em todos os processos iterativos é necessário decidir se o resultado de uma iteração está suficientemente próximo da solução exata, desconhecida, ou se é necessário efetuar-se mais uma iteração. Adota-se então um critério de convergência para que essa decisão seja tomada.

Dados dois vetores  $\tilde{v}^j$  e  $\tilde{v}^{j+1}$  correspondentes às iterações  $j$  e  $j + 1$ , respectivamente, o critério de convergência adotado se escreve:

$$\frac{\| \underline{v}^{j+1} - \underline{v}^j \|}{\| \underline{v}^j \|} \leq \gamma \quad (4.50)$$

onde  $\gamma$  é a tolerância especificada e  $\| \cdot \|$  indica a norma vetorial empregada, que no caso foi a norma euclideana:

$$\| \underline{v} \|_E = \left[ \sum_{i=1}^n v_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.51)$$

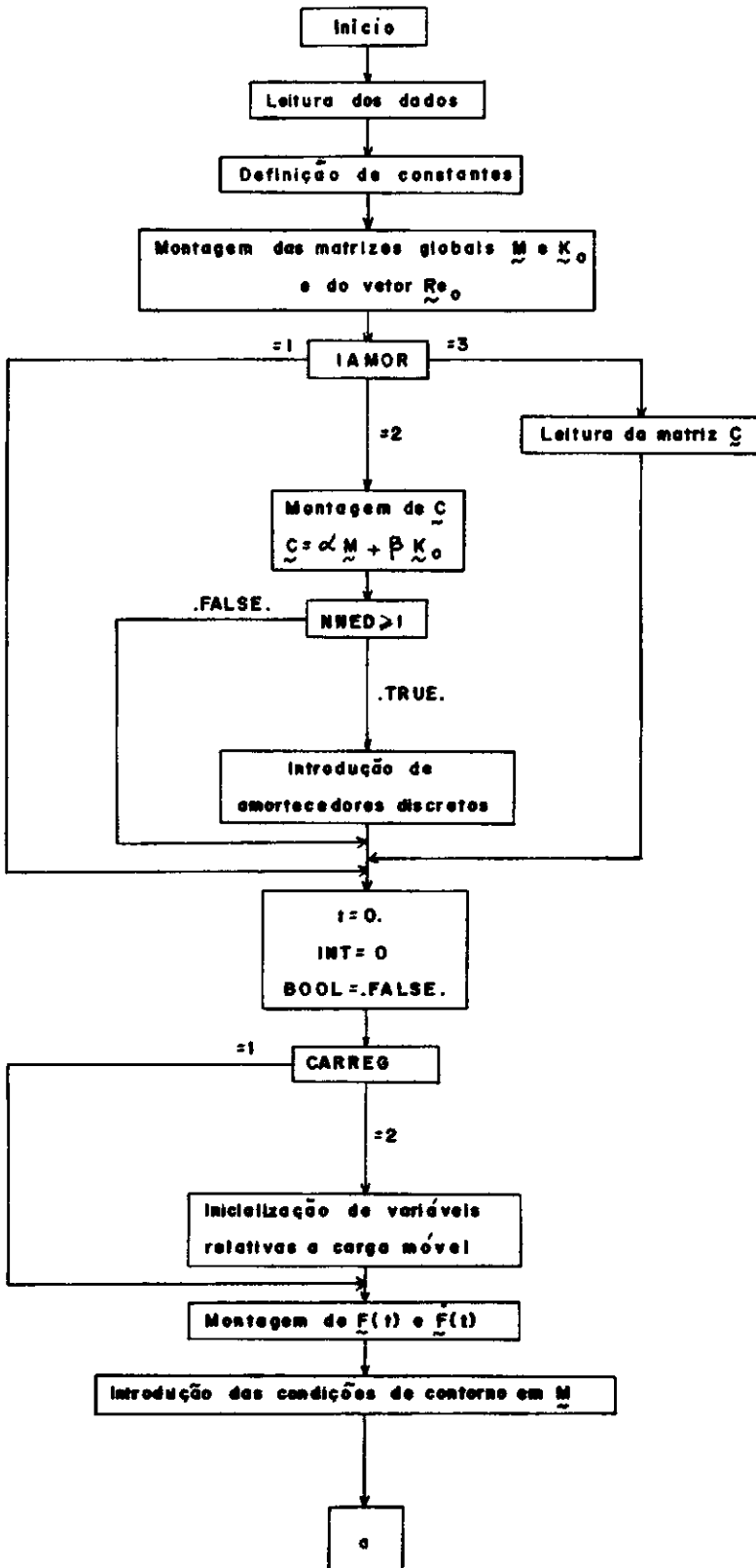
Mais considerações sobre critérios de convergência na solução de problemas estruturais não-lineares por processos iterativos são encontradas na ref. [34] .

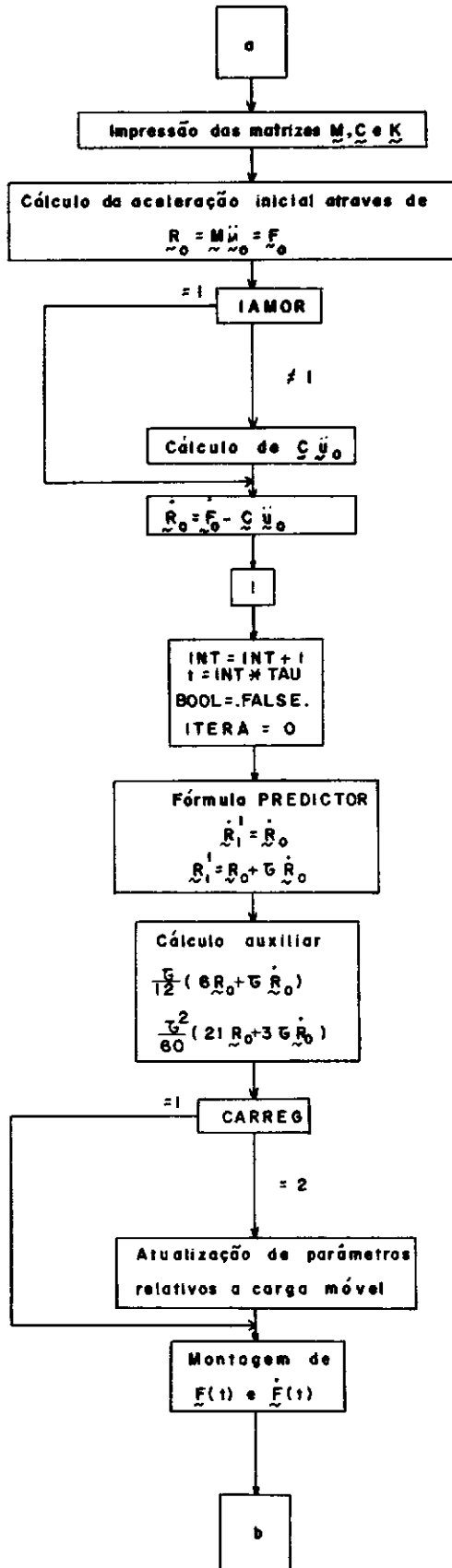
O critério adotado, equação (4.50), é aplicado, em análise não-linear, ao vetor incremento de deslocamentos  $\Delta \underline{u}$ , para o cálculo da matriz  $\underline{K}_0^* = \frac{1}{2} (\underline{K}_0 + \underline{K}_1)$  (vide fluxograma).

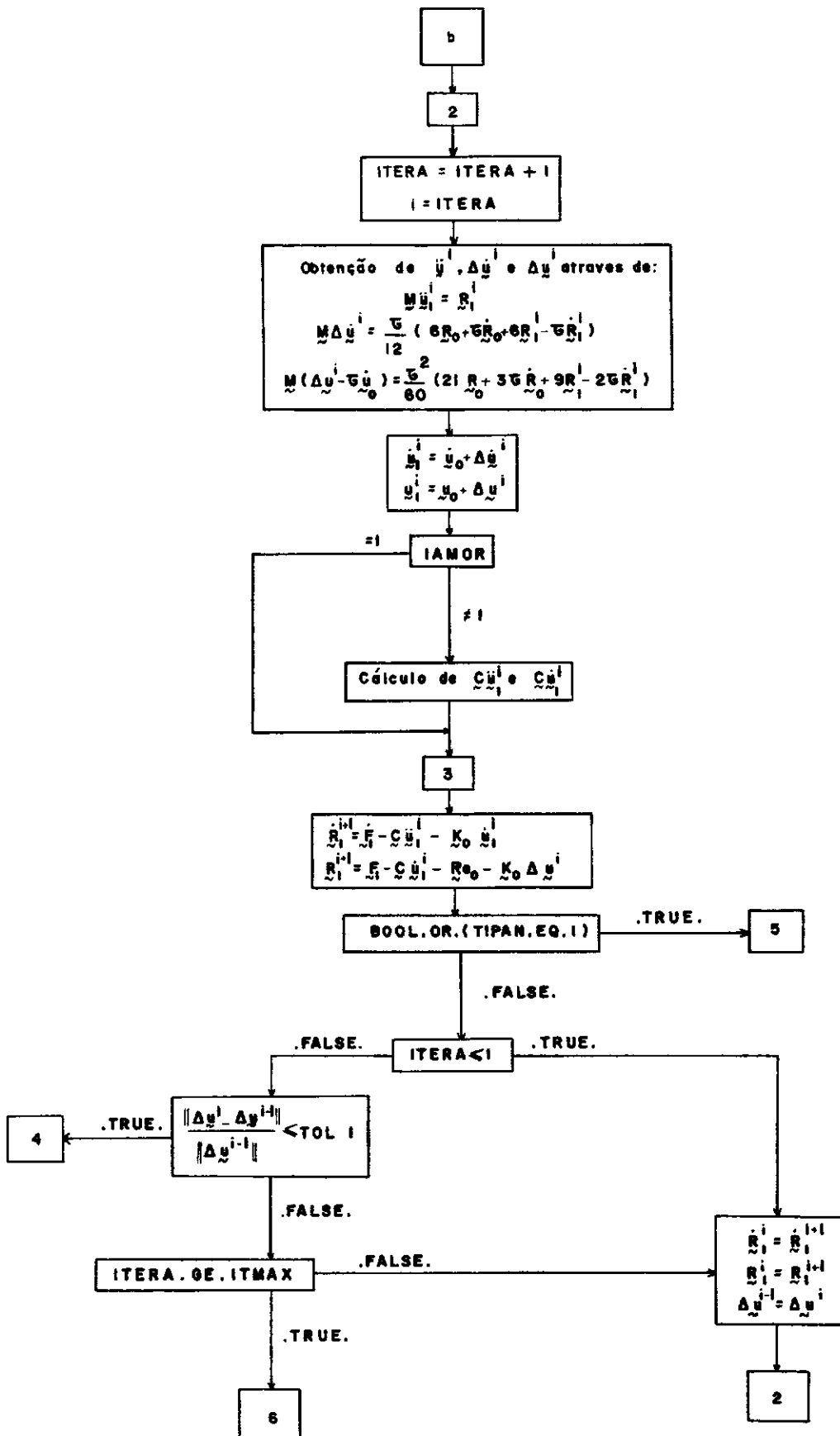
Em todas as análises, para se interromper o processo iterativo, o mesmo critério é aplicado ao vetor  $\dot{\underline{R}} = \underline{M} \ddot{\underline{u}}$ , derivada das forças de inércia, por estar ligado à derivada mais alta, em relação ao tempo, do vetor de deslocamentos  $\underline{u}$  .

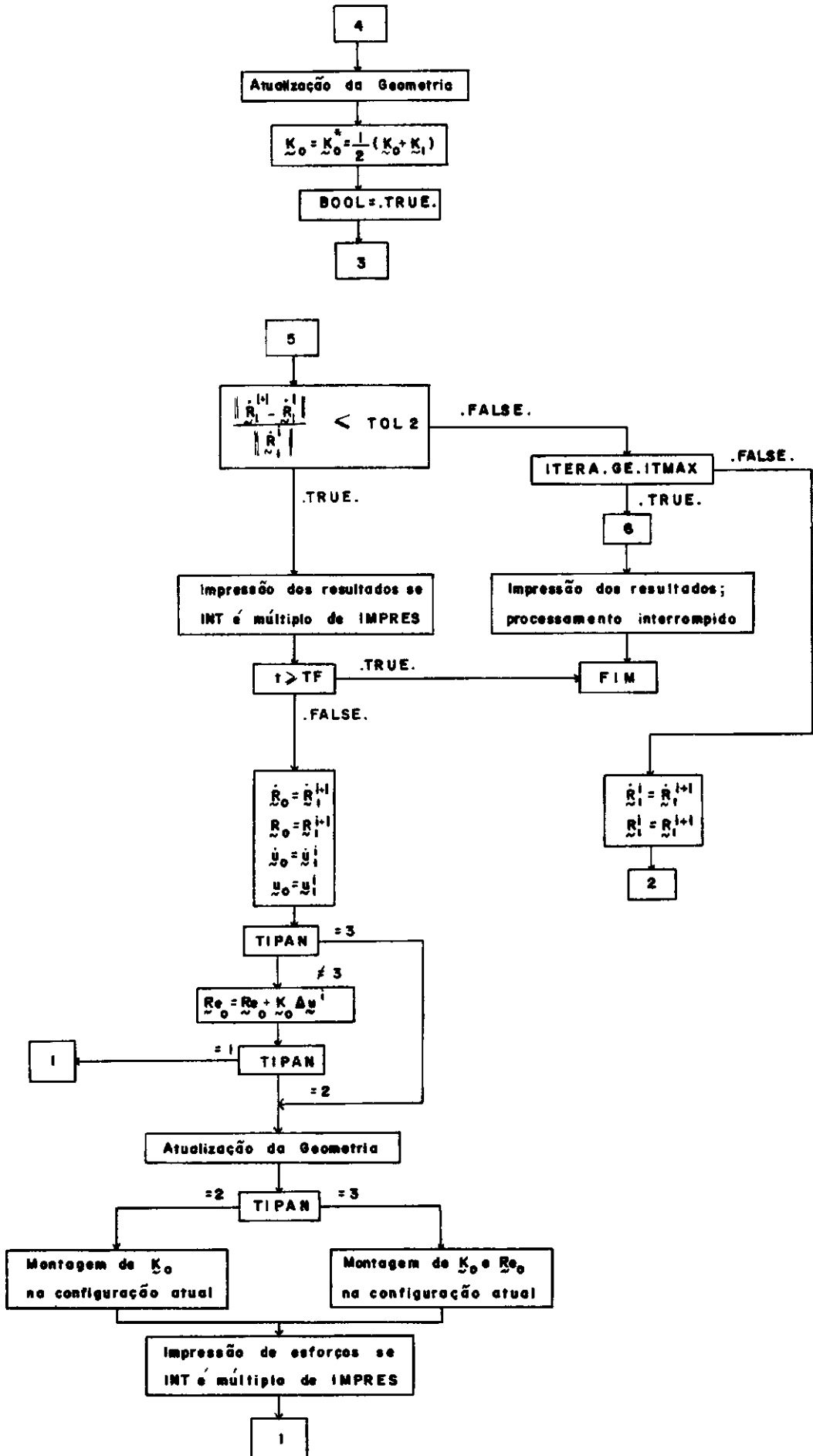
## 4.7

## FLUXOGRAMA









#### 4.8 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

São apresentados a seguir alguns resultados obtidos utilizando-se o algoritmo já descrito e implementado no programa listado em Apêndice.

Foi desenvolvido também um programa auxiliar através do qual as características dinâmicas dos modelos discretos (frequências e modos naturais) foram determinadas.

##### EXEMPLO I

Como primeiro exemplo tomou-se o problema de vibrações longitudinais de uma haste homogênea, de seção transversal constante, mostrada na figura 4.5 onde os dados estão num sistema de unidades coerentes. Uma das extremidades da haste é fixa e a outra foi submetida a uma carga cuja variação no tempo é dada também na figura 4.5.

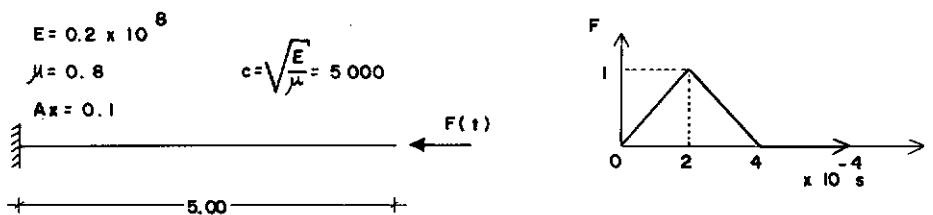


FIG. 4.5

A discretização espacial foi feita por meio de 40 elementos de treliça plana de mesmo comprimento.

O modelo discreto obtido com o uso da matriz de massa consistente apresenta o período fundamental  $T_{\max} = T_f = 0.4 \times 10^{-2}$  s e o período mínimo, correspondente à frequência de

corde,  $T_{\min} = 0,4537 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Os valores exatos (modelo contínuo) [5] são, respectivamente,  $T_f = 0.4 \times 10^{-2} \text{ s}$  e  $T_{40} = 0.5063 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Foram analisados dois intervalos de tempo  $\tau = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , correspondente a  $0,0025 T_f$  e  $0.220 T_{\min}$ , e  $\tau = 0.2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , correspondente a  $0.005 T_f$  e  $0.441 T_{\min}$ .

Os diagramas do esforço normal ao longo da haste, para alguns valores de  $t$ , encontram-se nas figuras 4.7 e 4.8 onde o esforço normal de compressão foi tomado como positivo. A solução exata do problema contínuo é também apresentada na mesma figura.

Ambos os intervalos de integração levam a resultados satisfatórios não se observando uma melhora significativa ao se diminuir o intervalo para  $\tau = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Adotando-se a matriz de massa diagonal, o modelo discreto obtido apresenta o período fundamental  $T_{\max} = T_f = 0.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  e o período mínimo  $T_{\min} = 0.7855 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

Foram analisados os mesmos intervalos de tempo:  $\tau = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0.127 T_{\min}$  e  $\tau = 0.2 \cdot 10^{-4} \text{ s} = 0.255 T_{\min}$  e alguns resultados encontram-se nas figuras 4.9 e 4.10. Também nesse caso os resultados para os dois intervalos de integração são satisfatórios, confirmando as conclusões da referência [35] segundo as quais a matriz de massa consistente não apresenta, nesse caso, melhor convergência, para as frequências e modos naturais, do que a matriz de massa diagonal adotada.

Observe-se que o uso da matriz de massa diagonal, além de tornar o algoritmo explícito, dá origem a um modelo discreto cuja frequência de corte é inferior à do modelo consistente o que torna mais rápida a convergência do processo iterativo (figura 3.2). Isto acarretou, para  $\tau = 0.2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , um tempo de processamento



da ordem de 40% do tempo do processamento gasto ao se utilizar a matriz consistente.

Em todos os casos adotou-se  $TOL2 = 0.1 \cdot 10^{-3}$ .

Em seguida considerou-se o mesmo problema para o caso em que a haste é composta de dois materiais com módulos de elasticidade diferentes como indicado na figura 4.6.

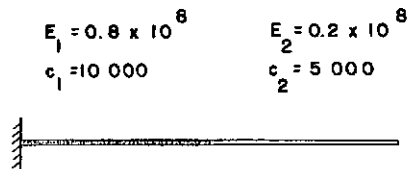


FIG. 4.6

As características dinâmicas dos modelos são agora:

massa consistente	$T_{\max} = 0.2552 \cdot 10^{-2} s$	$T_{\min} = 0.2286 \cdot 10^{-4} s$
massa diagonal	$T_{\max} = 0.2552 \cdot 10^{-2} s$	$T_{\min} = 0.3938 \cdot 10^{-4} s$

Para o caso de matriz de massa diagonal foram analisados os intervalos de integração  $\tau = 0.1 \cdot 10^{-4} s = 0.254 T_{\min}$  e  $\tau = 0.2 \cdot 10^{-4} s = 0.508 T_{\min}$  e alguns resultados estão, juntamente com a solução exata, nas figuras 4.12 e 4.13.

Já ao se fazer uso da matriz consistente apenas o intervalo  $\tau = 0.1 \cdot 10^{-4} s = 0.437 T_{\min}$  pode ser analisado (figura 4.11) uma vez que o intervalo  $\tau = 0.2 \cdot 10^{-4} s = 0.875 T_{\min}$  está fora da região de convergência do processo iterativo (figura 3.2).

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

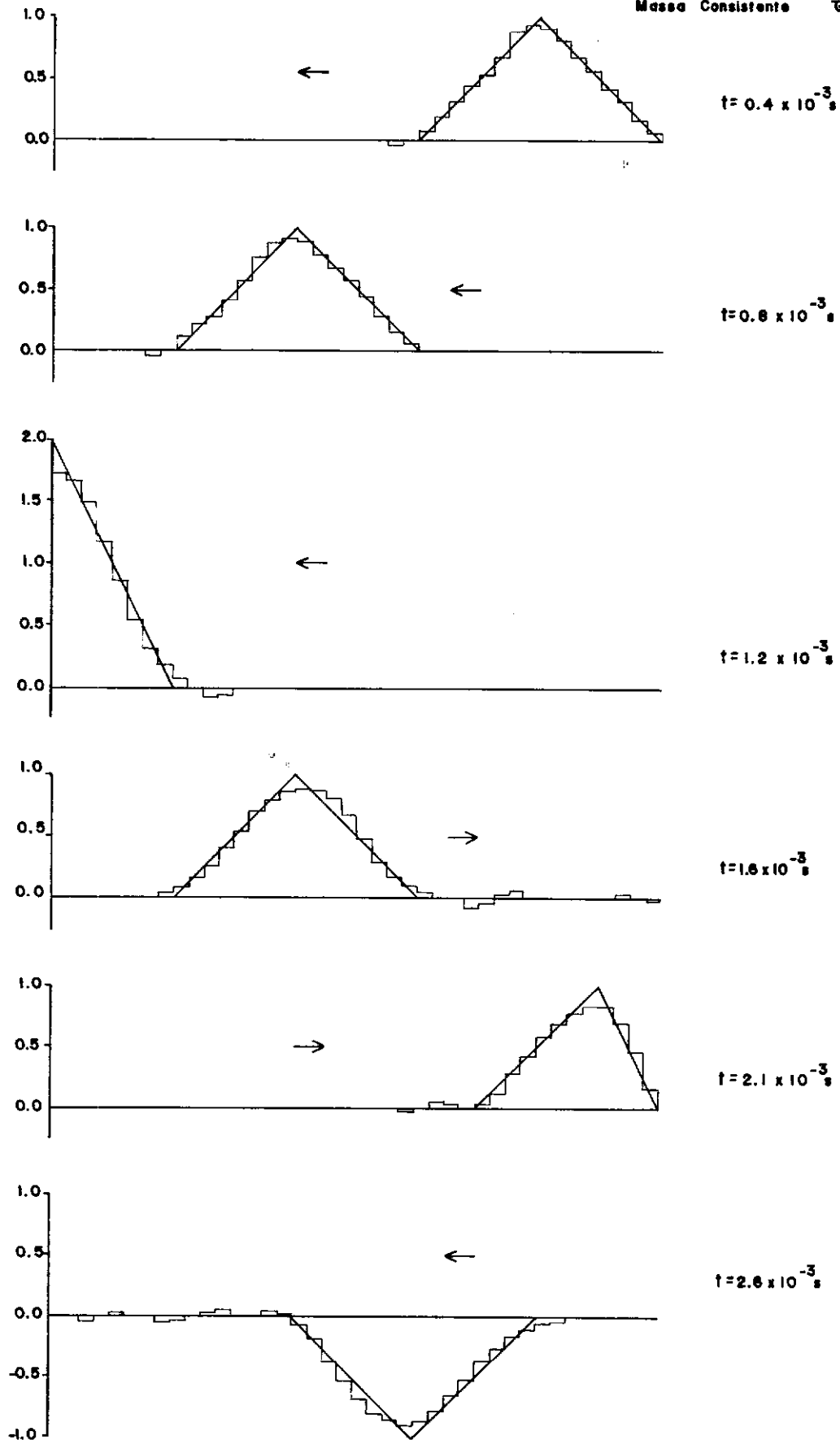
Massa Consistente  $\tau = 0.00001 \text{ s}$ 

FIG. 4.7

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

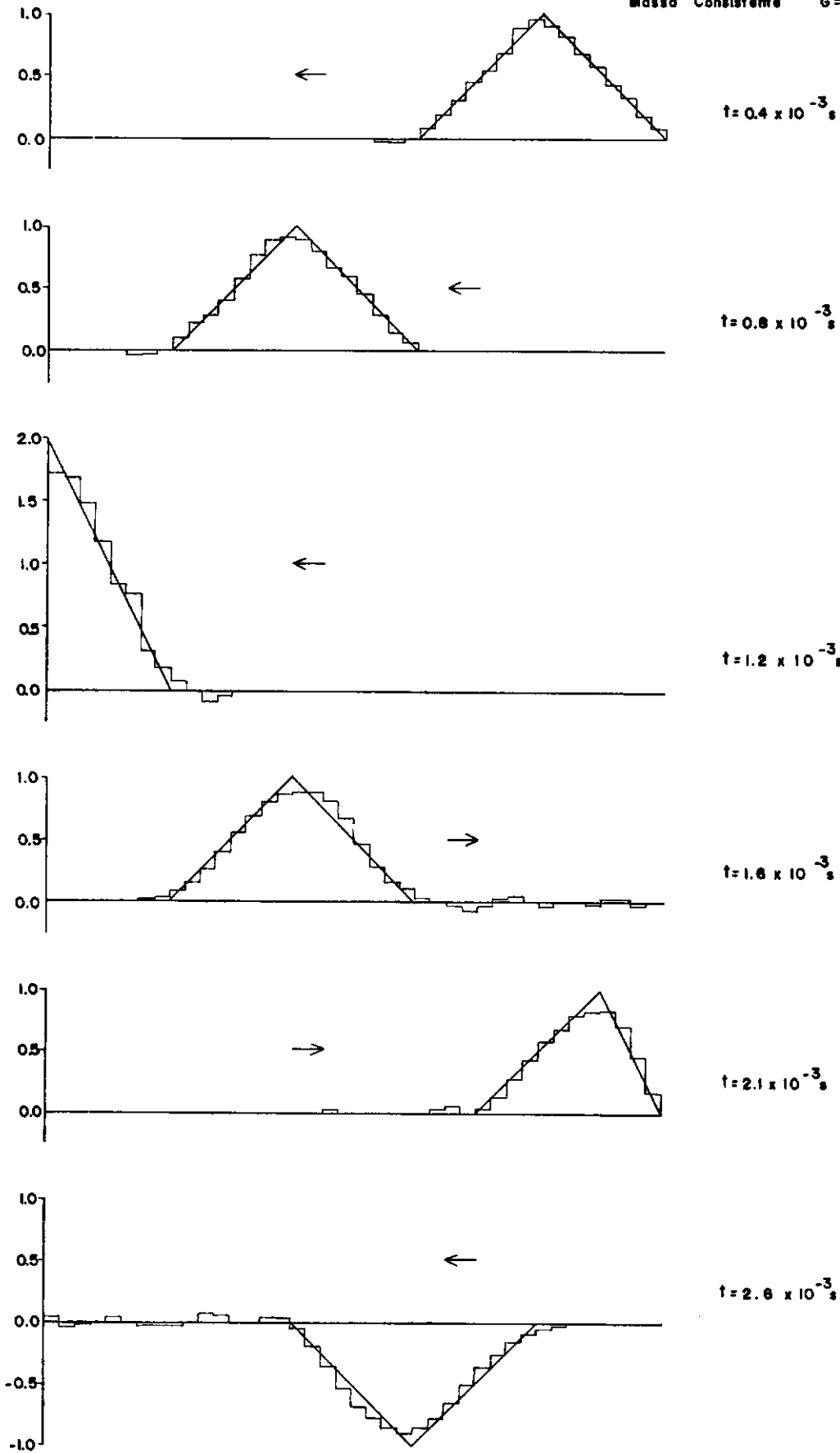
Massa Consistente  $\tau = 0.00002 \text{ s}$ 

FIG. 4.8

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

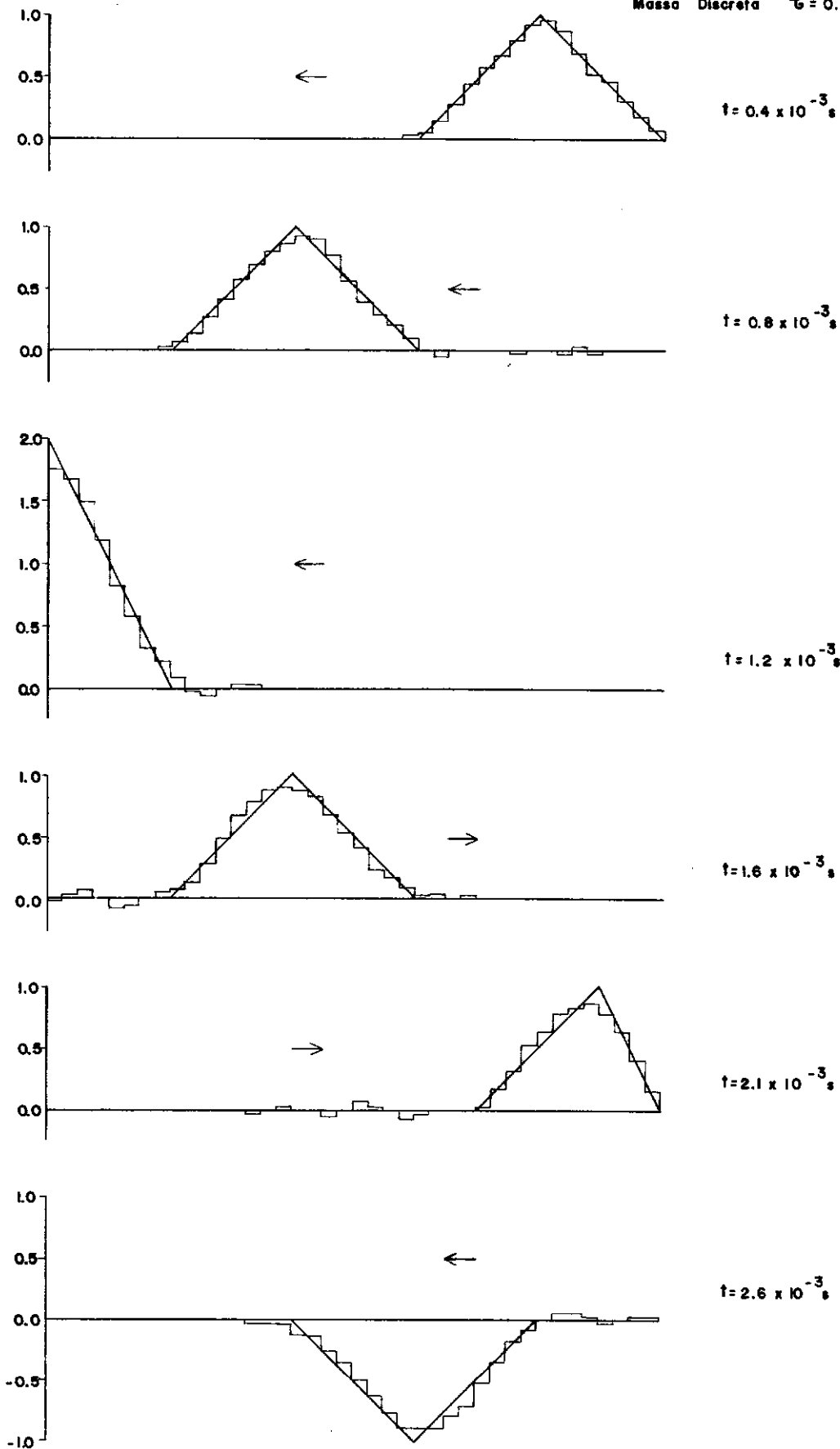
Massa Discreta  $\tau = 0.00001$  s

FIG. 4.9

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

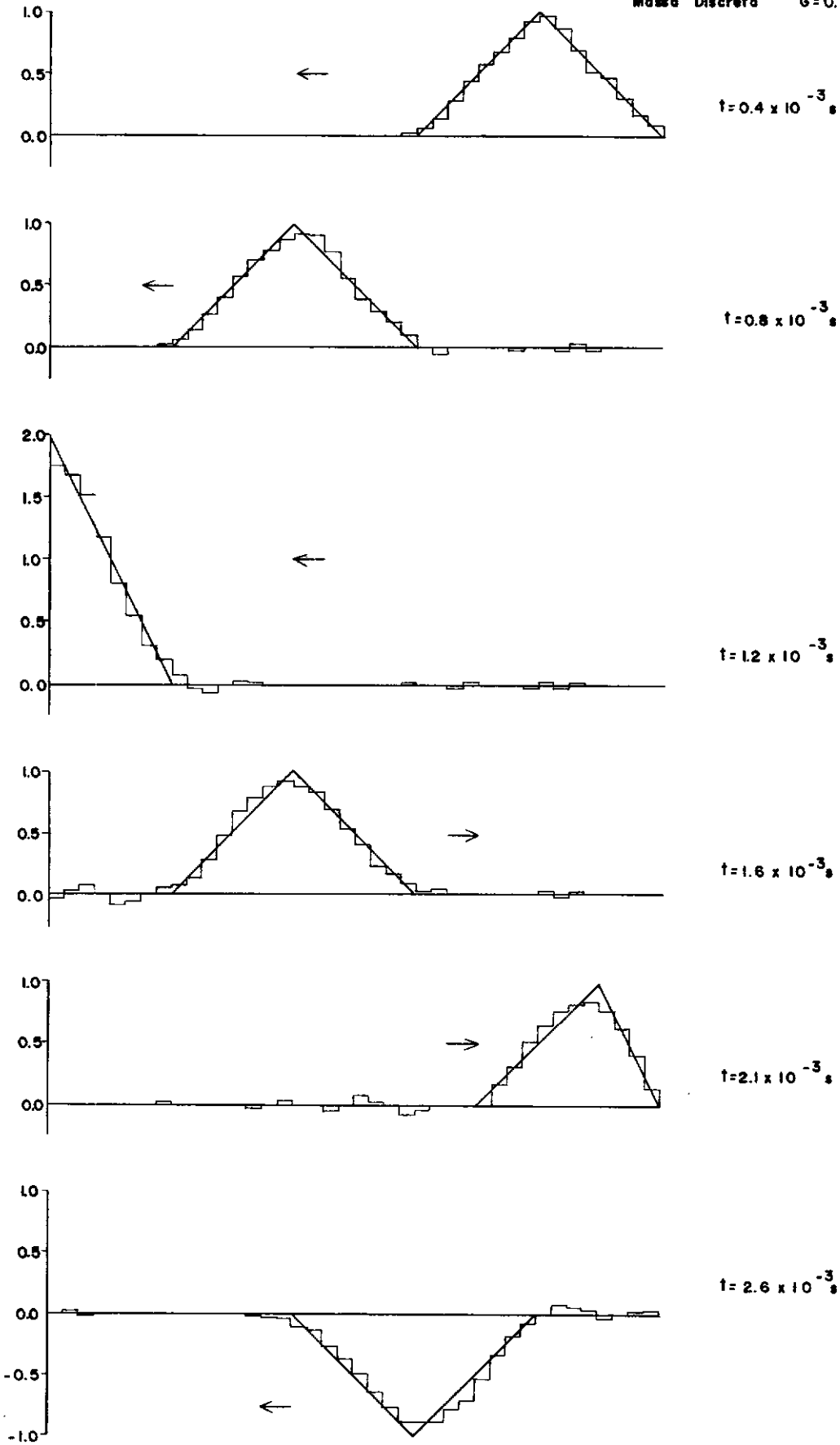
Massa Discreta  $\tau = 0.00002 \text{ s}$ 

FIG. 4.10

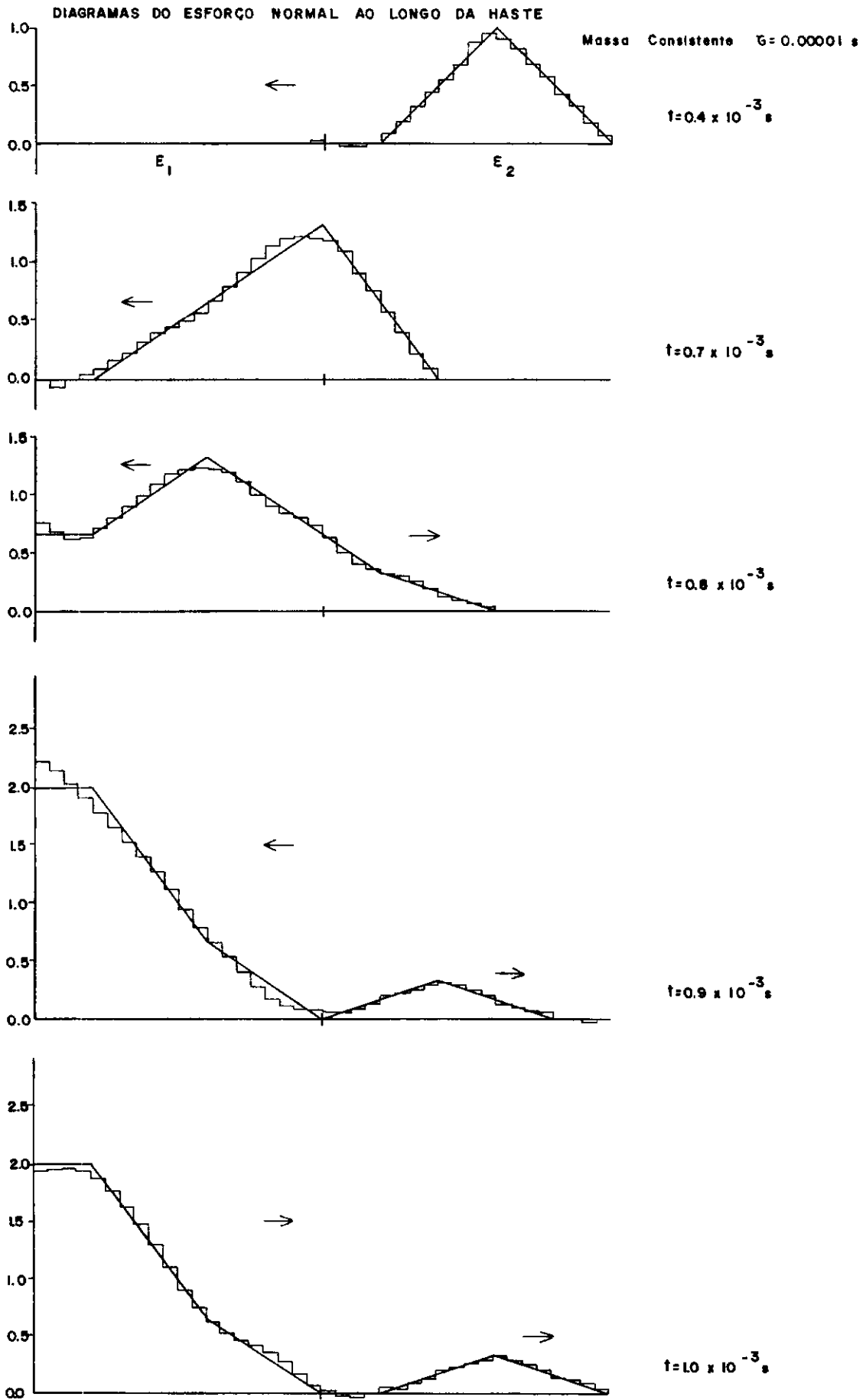


FIG. 4.11 a

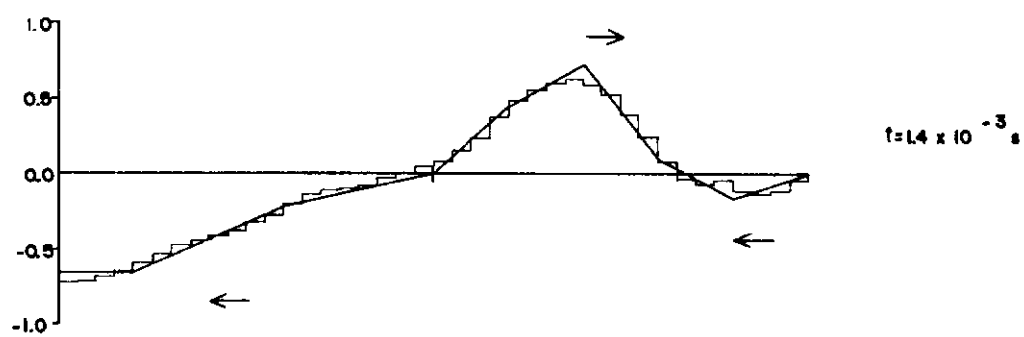
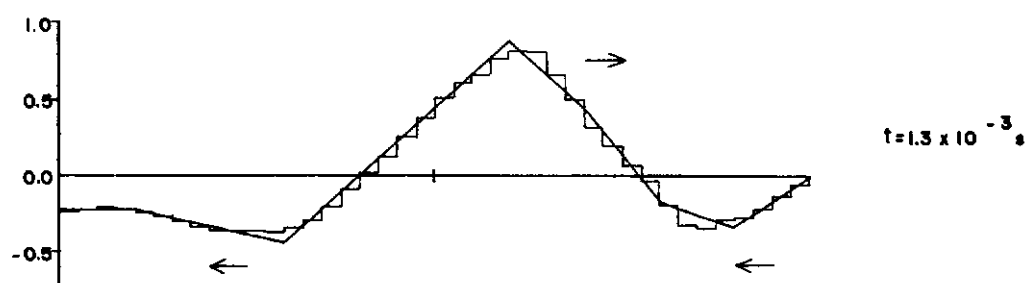
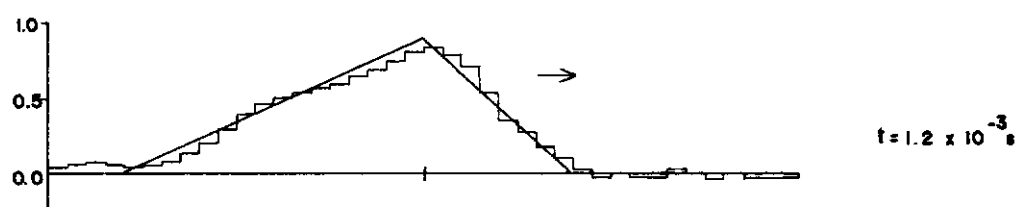
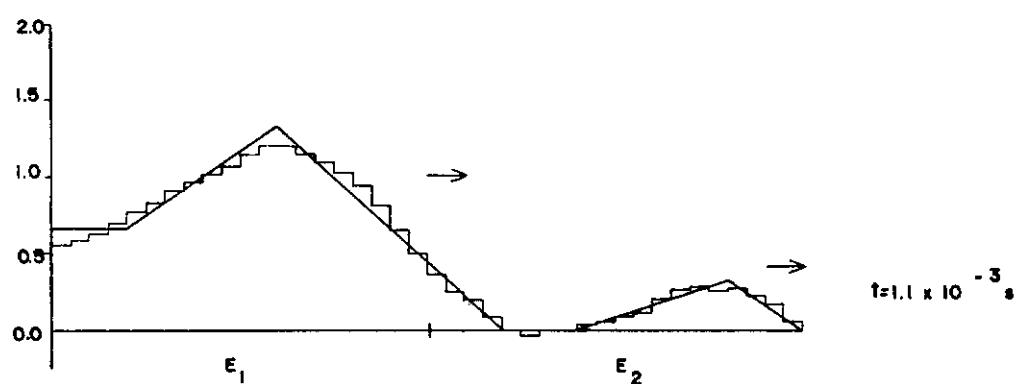


FIG. 4.11 b

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

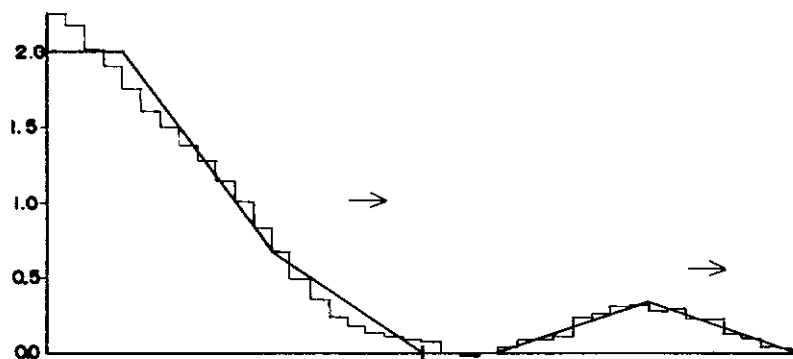
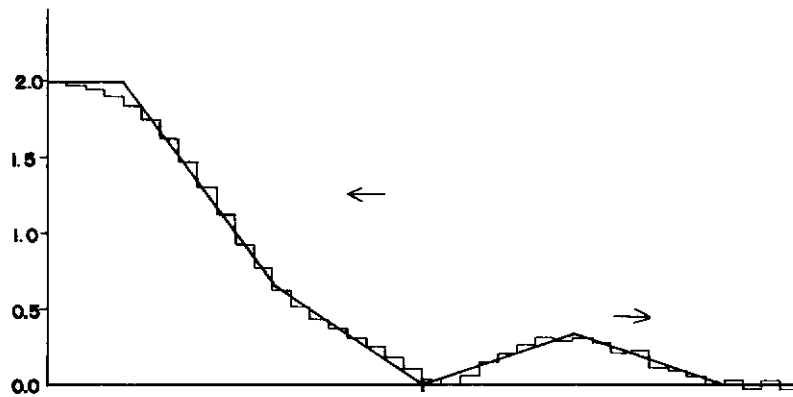
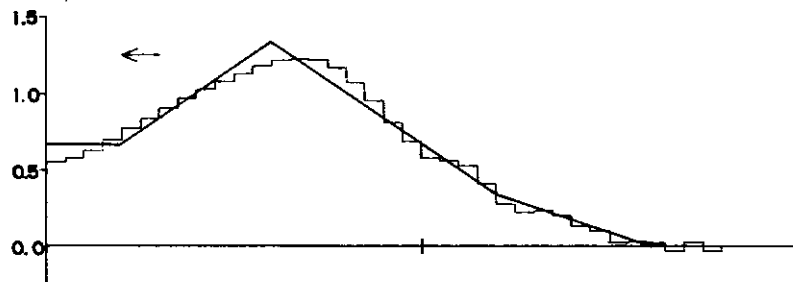
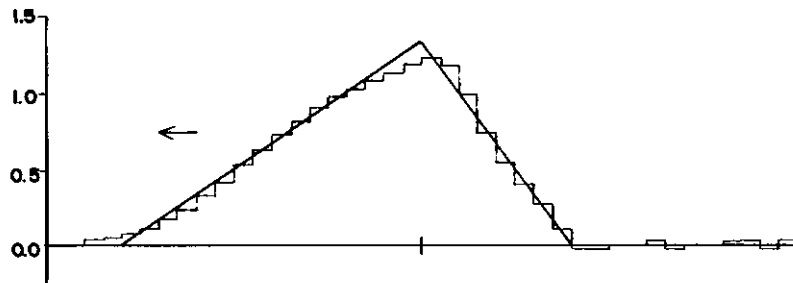
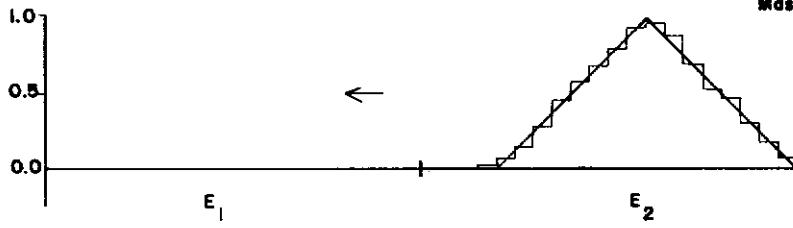
Massa Discreta  $\Delta t = 0.00001$  s

FIG. 4.12 a



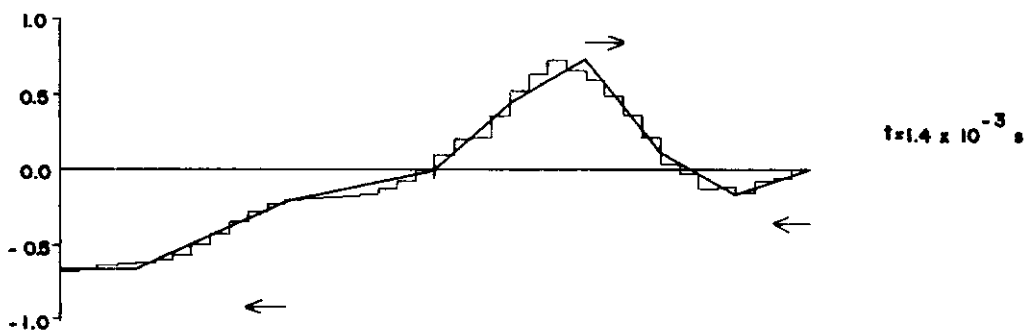
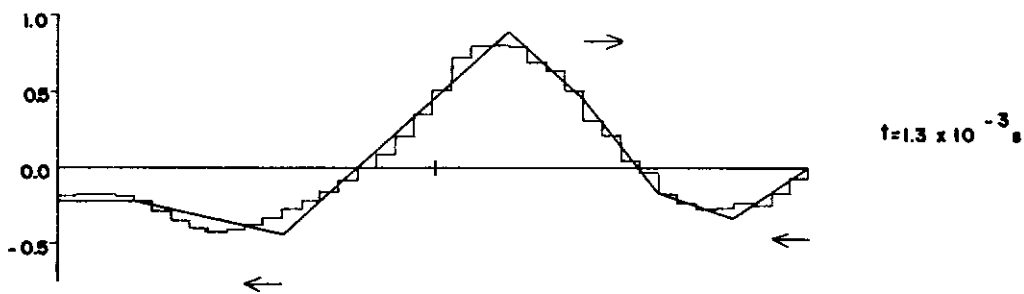
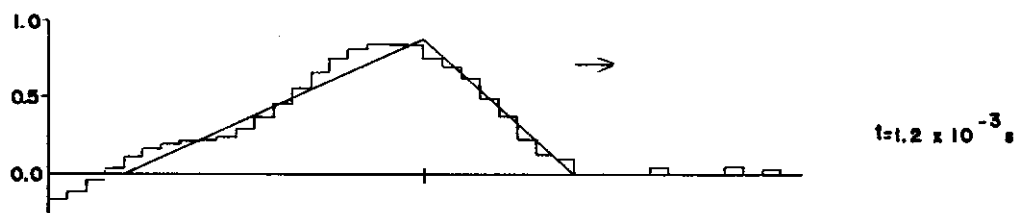
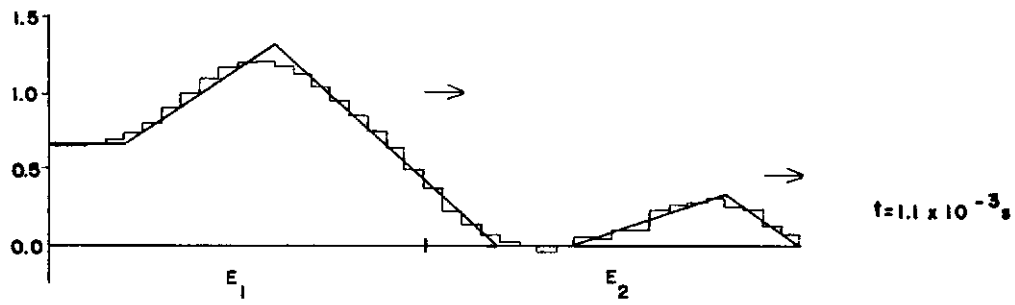


FIG. 4.12 b

## DIAGRAMAS DO ESFORÇO NORMAL AO LONGO DA HASTE

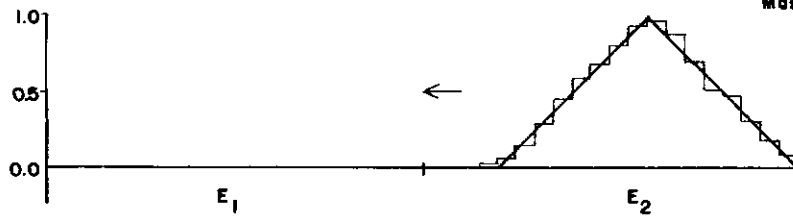
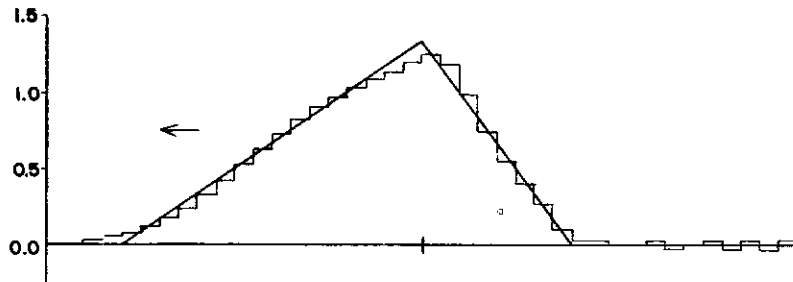
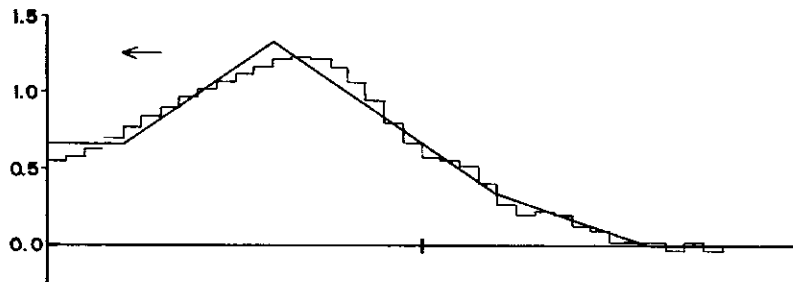
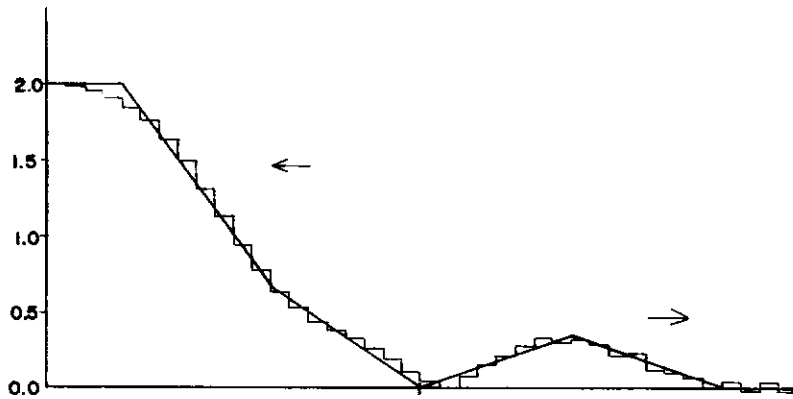
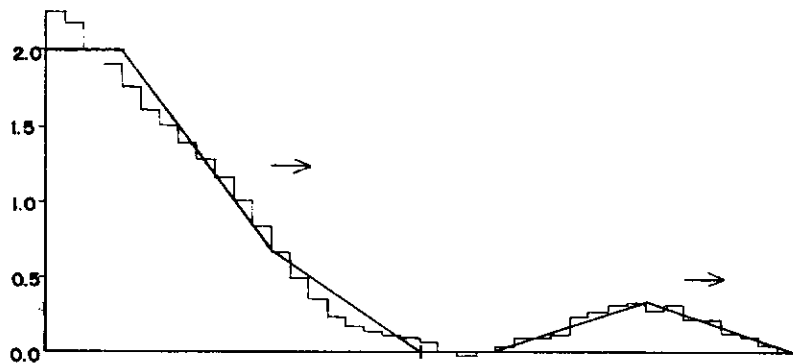
Massa Discreta  $\tau_0 = 0.00002 \text{ s}$  $t = 0.4 \times 10^{-3} \text{ s}$  $t = 0.7 \times 10^{-3} \text{ s}$  $t = 0.8 \times 10^{-3} \text{ s}$  $t = 0.9 \times 10^{-3} \text{ s}$  $t = 1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ 

FIG. 4.13a

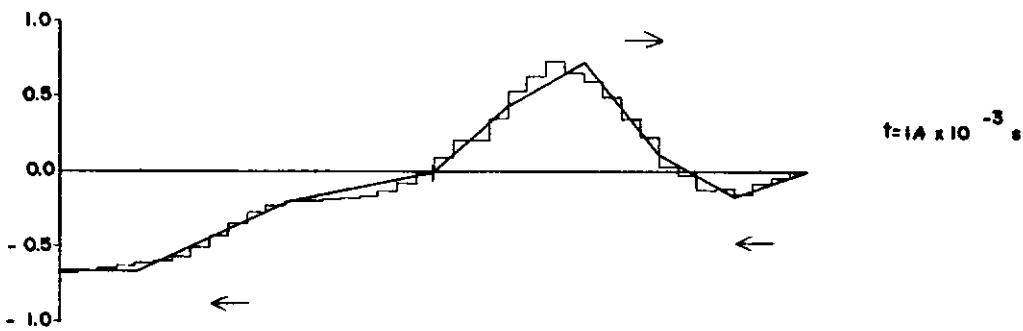
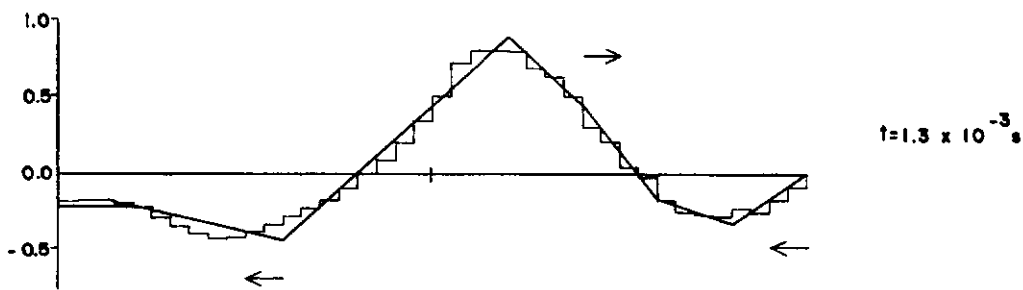
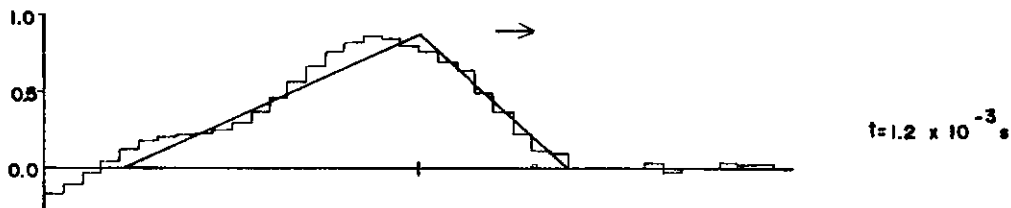
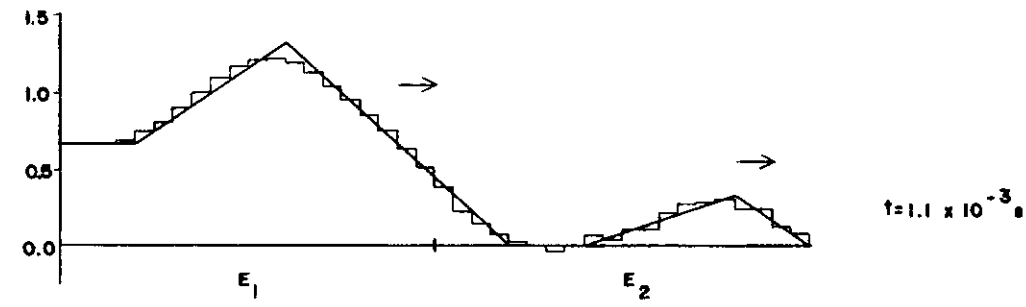


FIG. 4.13b

## EXEMPLO II

Considerou-se o comportamento não-linear de uma viga bi-engastada, estudada na referência [36] e outras, submetida a uma carga concentrada vertical aplicada subitamente no meio do vão.

Dada a simetria do problema, apenas a metade da viga e do carregamento foram utilizados.

A discretização espacial foi feita através de quatro elementos de pórtico plano, de mesmo comprimento, conforme esquematizado na figura 4.14.

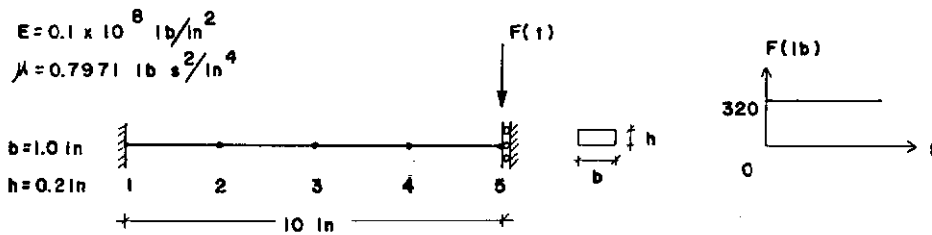


FIG. 4.14

Os períodos máximo e mínimo do modelo discreto (figura 4.14) em sua configuração inicial, para os casos de massa consistente e massa discreta, levando-se em conta ou não a inêrcia de rotação, estão indicados na Tabela 4.1.

		$T_f$	$T_{min}$
MASSA CONSISTENTE	S/In.Rot.	$0.1737 \cdot 10^{-1}$	$0.4983 \cdot 10^{-4}$
	C/In.Rot.	$0.1737 \cdot 10^{-1}$	$0.4983 \cdot 10^{-4}$
MASSA DISCRETA	S/In.Rot.	$0.1738 \cdot 10^{-1}$	$0.7590 \cdot 10^{-4}$
	C/In.Rot.	$0.1738 \cdot 10^{-1}$	$0.7590 \cdot 10^{-4}$

TABELA 4.1

Dada a pequena influência da inércia de rotação sobre as frequências, nesse problema, ela não foi considerada na análise que se segue.

Adotando-se o intervalo de integração  $\tau = 0.00001s$  os valores de  $\tau/T_f$  e  $\tau/T_{min}$ . Para os dois modelos discretos estão na tabela 4.2.

	$\tau/T_f$	$\tau/T_{min}$
MASSA CONSISTENTE	$0.576 \cdot 10^{-3}$	0.201
MASSA DISCRETA	$0.575 \cdot 10^{-3}$	0.132

TABELA 4.2

Para se observar o comportamento da matriz de massa discreta empregada, eq. (4.16), o deslocamento vertical do nó 5 é apresentado na figura 4.15 para os casos de matrizes de massa consistente e discreta. Empregou-se  $\tau = 0.00001s$  e  $TIPAN = 3$ , ou seja, as forças elásticas ao início de um intervalo de tempo são determinadas a partir da configuração deformada ao final do

intervalo anterior.

Usando-se a matriz de massa consistente e  $\tau = 0.00001s$ , a figura 4.16 mostra o deslocamento vertical do nó 5 para os casos de  $TIPAN = 3$  e  $TIPAN = 2$ , quando as forças elásticas  $\underline{R}_E$  são calculadas por acumulação da parcela  $\underline{K}_0^* \Delta \underline{u}$  com o valor de  $\underline{R}_E$  no início do intervalo de integração (vide fluxograma).

Os deslocamentos verticais do nó 5, tomando-se  $\tau = 0.000025s$ , são praticamente coincidentes com os obtidos com  $\tau = 0.00001s$ , impedindo uma representação gráfica clara.

Finalmente introduziu-se amortecimento da forma  $\underline{C} = \alpha \underline{M}$ , onde  $\underline{M}$  é a matriz de massa consistente e  $\alpha = 200$ .

O valor de  $\alpha$  adotado corresponde, na análise linear, a frações do amortecimento crítico, equação (4.43a), de  $\xi_1 = 0.276$  e  $\xi_{10} = 0.793 \cdot 10^{-3}$  no primeiro e último (décimo) modos, respectivamente. Os pontos  $P_1(\xi_1, \theta_1)$  e  $P_{10}(\xi_{10}, \theta_{10})$ , representativos da integração dos modos 1 e 10 são:

$$P_1 \dots \xi_1 = 0.276 \dots \theta_1 = \frac{\tau}{T_1} = 0.576 \cdot 10^{-3} \dots (T_1 = T_f)$$

$$P_{10} \dots \xi_{10} = 0.793 \cdot 10^{-3} \dots \theta_{10} = \frac{\tau}{T_{10}} = 0.201 \dots (T_{10} = T_{\min})$$

Pela figura 3.3 verifica-se que  $P_1$  e  $P_{10}$  estão na região de convergência e o intervalo de integração escolhido pode ser usado.

Na análise não-linear a convergência do processo iterativo estará assegurada enquanto a matriz de iteração, equação (3.71), variável no tempo, tiver seu raio espectral limitado pela unidade.

Adotou-se matriz de massa consistente e  $TIPAN = 3$   
e o deslocamento vertical do nó 5 está mostrado na figura 4.17.

Em todos os casos fez-se  $TOL1 = TOL2 = 0.1 \cdot 10^{-4}$ .

## DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DO N° 5

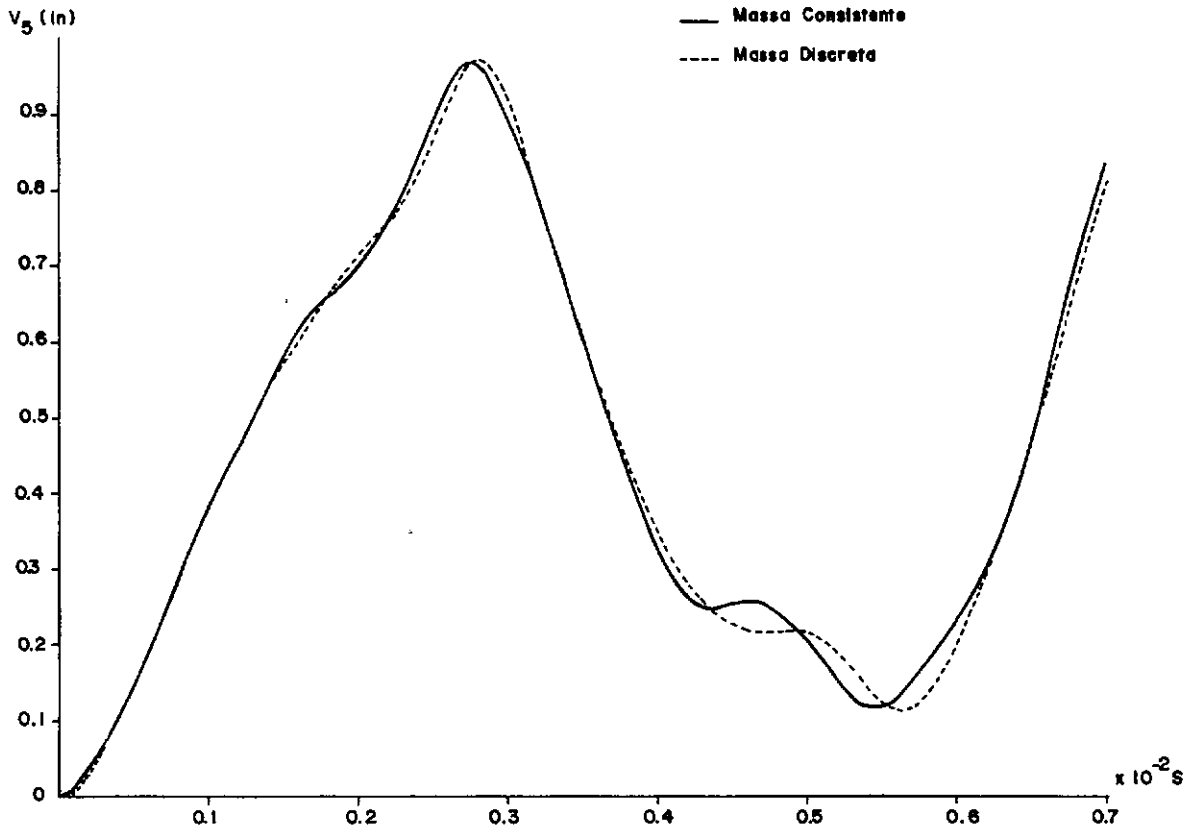


FIG. 4.15

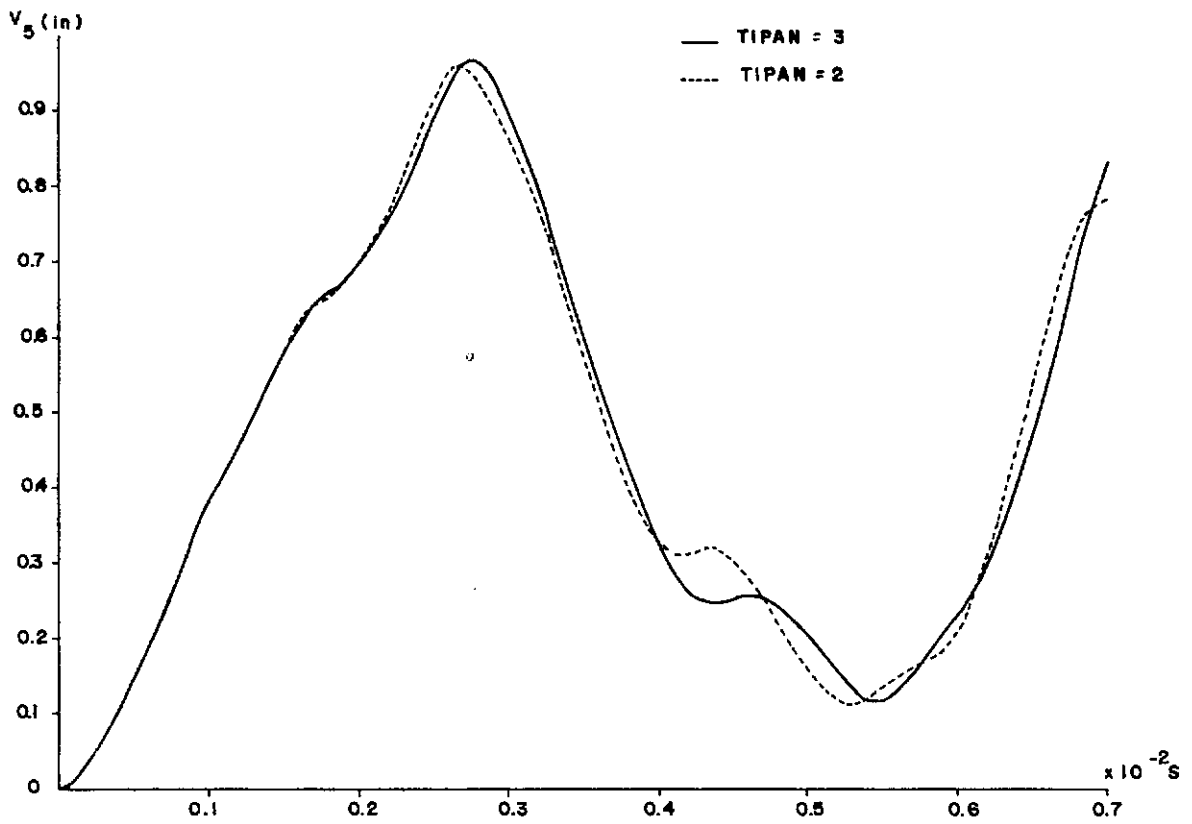


FIG. 4.16



DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DO NÓ 5

$$\underline{C} = 200 \text{ M}$$

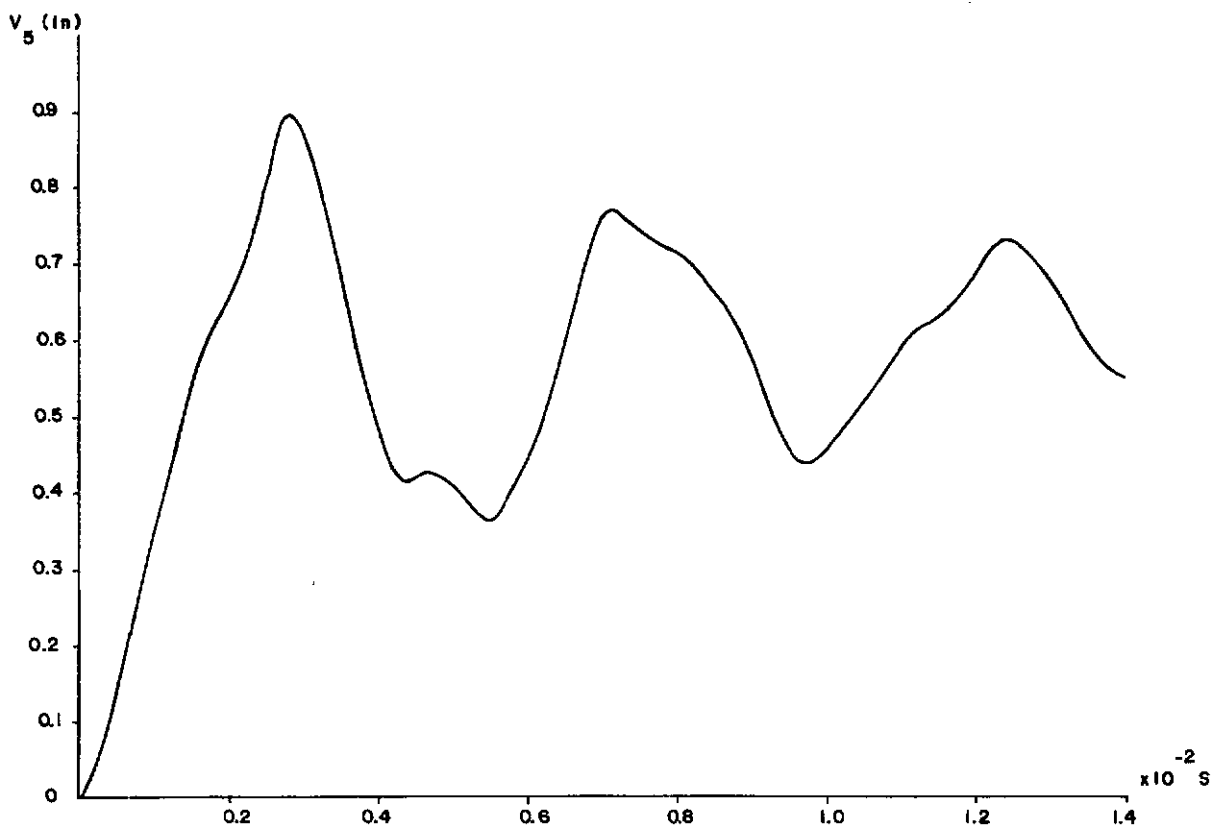


FIG. 4.17

## EXEMPLO III

Foi estudada a estrutura de cabos apresentada em [2] e esquematizada na figura 4.18 submetida a um carregamento transversal uniforme aplicado subitamente. Dada a simetria do problema, analisou-se um octante da estrutura conforme indicado na figura 4.18.

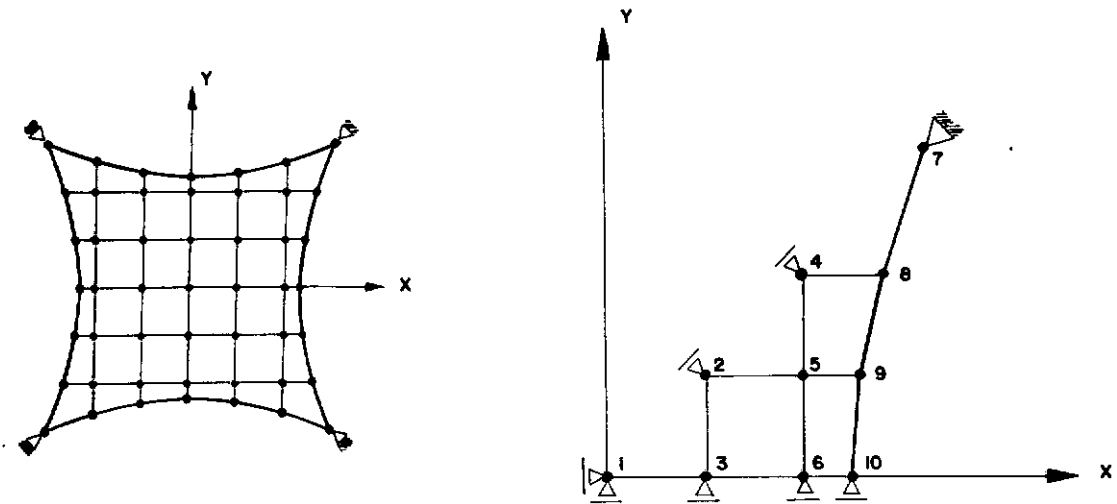


FIG. 4.18

A tabela 4.3 dá as coordenadas dos nós do modelo discreto bem como a massa concentrada e o carregamento segundo a direção  $z$ , associados a cada um deles.

As características dos elementos encontram-se na tabela 4.4. Todos os parâmetros estão expressos em unidades coerentes.

Nº	X	Y	Z	m	F <sub>z</sub>
1	0.000	0.000	0.0	$0.6029 \cdot 10^{-2}$	312.5
2	200.150	200.150	0.0	$0.2408 \cdot 10^{-1}$	1250.0
3	200.556	0.000	0.0	$0.2410 \cdot 10^{-1}$	1250.0
4	401.050	401.050	0.0	$0.1929 \cdot 10^{-1}$	1250.0
5	400.299	200.522	0.0	$0.4097 \cdot 10^{-1}$	2500.0
6	401.115	0.000	0.0	$0.1989 \cdot 10^{-1}$	1250.0
7	600.000	600.000	0.0	-	-
8	521.365	399.577	0.0	0.2594	1250.0
9	480.355	199.932	0.0	0.2483	1250.0
10	461.284	0.000	0.0	0.1226	312.5

TABELA 4.3 - COORDENADAS, MASSAS NODAIS E CARREGAMENTO

ELEMENTO	Nº 1	Nº 2	EA	TRAÇÃO INICIAL
1	3	2	$0.210 \cdot 10^7$	$0.1900 \cdot 10^4$
2	6	5	$0.210 \cdot 10^7$	$0.3093 \cdot 10^4$
3	5	4	$0.210 \cdot 10^7$	$0.3110 \cdot 10^4$
4	10	9	$0.210 \cdot 10^8$	$0.1708 \cdot 10^5$
5	9	8	$0.210 \cdot 10^8$	$0.1734 \cdot 10^5$
6	8	7	$0.210 \cdot 10^8$	$0.1821 \cdot 10^5$
7	4	8	$0.210 \cdot 10^7$	$0.3161 \cdot 10^4$
8	2	5	$0.210 \cdot 10^7$	$0.1892 \cdot 10^4$
9	5	9	$0.210 \cdot 10^7$	$0.1868 \cdot 10^4$
10	1	3	$0.105 \cdot 10^7$	$0.1605 \cdot 10^4$
11	3	6	$0.105 \cdot 10^7$	$0.1609 \cdot 10^4$
12	6	10	$0.105 \cdot 10^7$	$0.1622 \cdot 10^4$

TABELA 4.4 - CARACTERÍSTICAS DOS ELEMENTOS

O modelo discreto assim definido apresenta, em sua configuração inicial, um período máximo  $T_f = 0.7459s$  e um período mínimo  $T_{min} = 0.5479 \cdot 10^{-2}s$ .

O intervalo de integração escolhido foi  $\tau = 0.001s$  que corresponde a  $0.134 \cdot 10^{-2} T_f$  e  $0.1825 T_{min}$ .

A figura 4.19 apresenta o deslocamento vertical do nó 1 para os dois tipos de análise,  $TIPAN = 2$  e  $TIPAN = 3$ , quando se utilizam elementos de treliça.

Na figura 4.20 a mesma comparação é feita, utilizando-se elementos de cabo que não atuam em compressão.

A diferença entre as duas soluções é maior no segundo caso já que o procedimento de cálculo das forças elásticas  $\tilde{R}_E$  correspondente a  $TIPAN = 2$  introduz erros mais sensíveis sempre que algum elemento deixar de ser tracionado. Quando isto ocorre a matriz de rigidez do elemento não contribui para a rigidez da estrutura. Por outro lado a acumulação do produto  $K_O^* \Delta u$  ao vetor  $\tilde{R}_E$  no início do intervalo faz com que os elementos não tracionados continuem contribuindo para o vetor global  $\tilde{R}_E$ .

Finalmente na figura 4.21 o deslocamento vertical do nó 1 é apresentado para os modelos obtidos com elementos de treliça e cabo, utilizando-se o cálculo mais preciso ( $TIPAN = 3$ ) das forças elásticas  $\tilde{R}_E$ .

O comportamento dos modelos é idêntico até que se desenvolva compressão em algum elemento. A partir daí o elemento de cabo fornece uma aproximação mais realista, desde que se use o procedimento correspondente a  $TIPAN = 3$ .

Adotou-se em todos os casos  $TOL1 = TOL2 = 0.1 \cdot 10^{-4}$ .

## DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DO NÓ 1

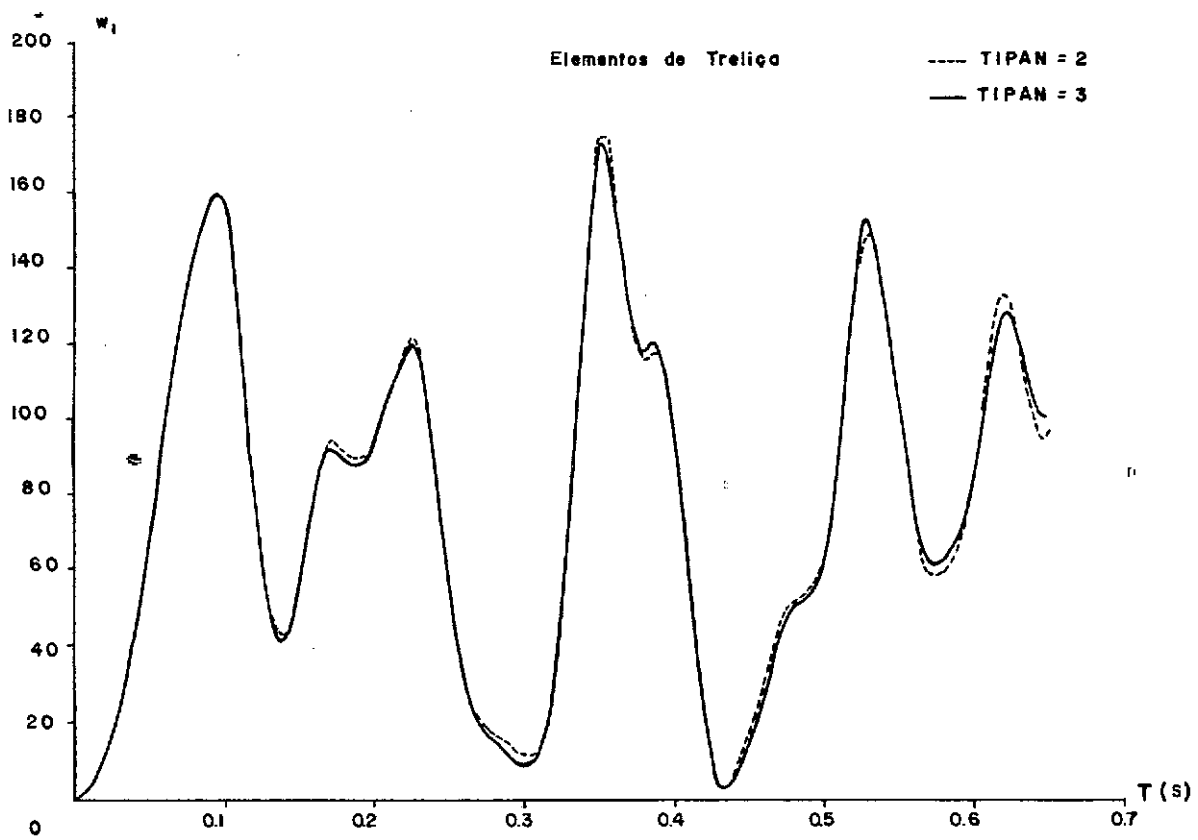


FIG. 4.19

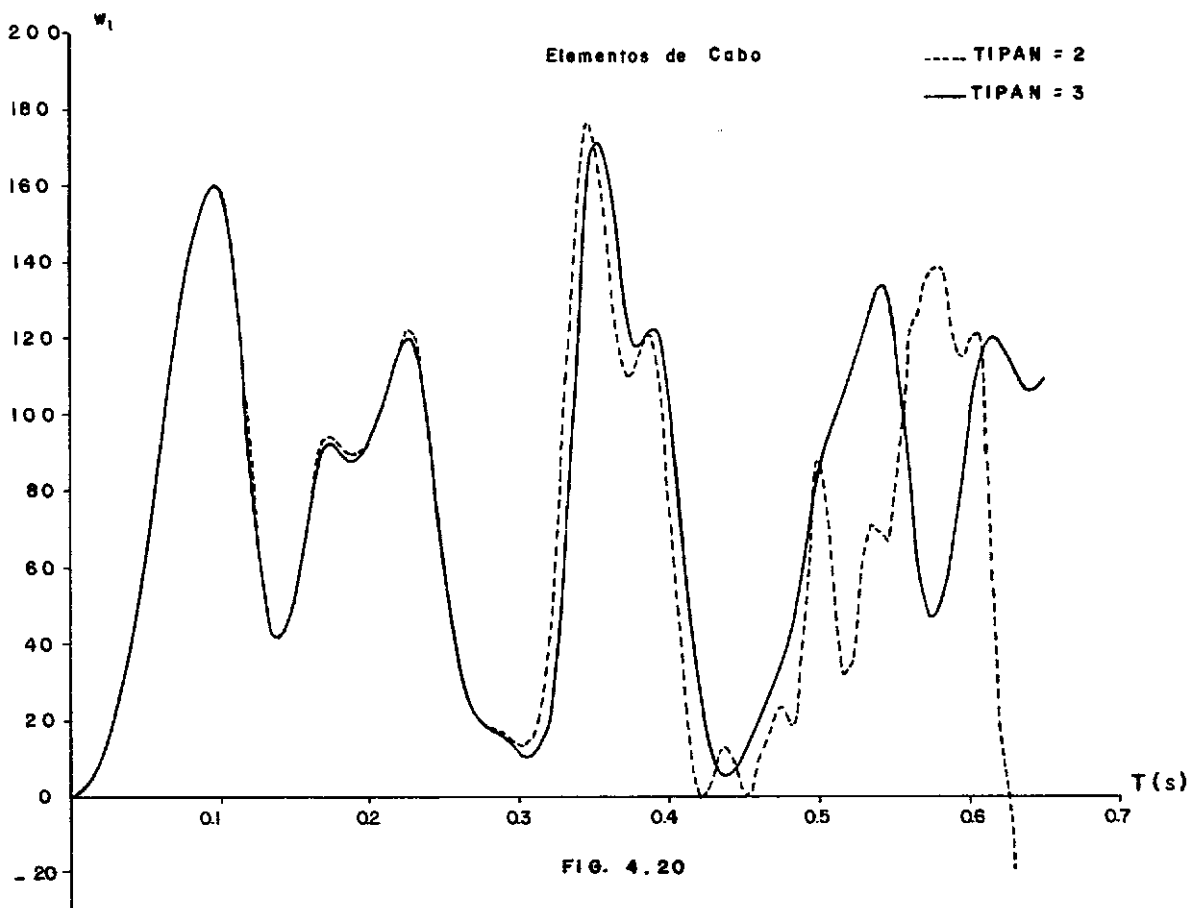


FIG. 4.20

## DESLOCAMENTO TRANSVERSAL DO NÓ 1

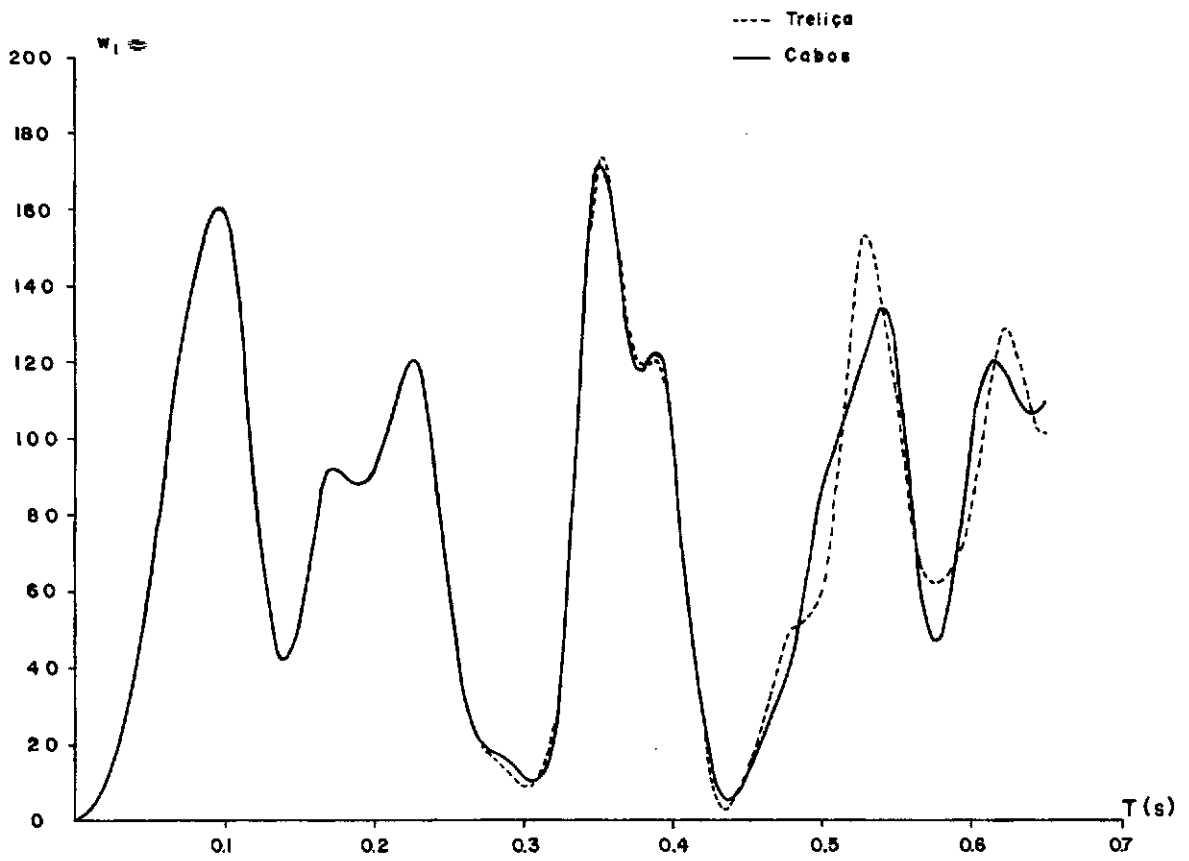


FIG. 4.21

## EXEMPLO IV

A fim de se analisar um problema de carga móvel [40, 41, 42, 43, 44], não levando em conta a inércia do carregamento [43, 45], mas considerando a não-linearidade geométrica, tomou-se a viga bi-engastada estudada no Exemplo II.

A discretização espacial foi feita por meio de 4 elementos de pórtico plano de igual comprimento, conforme indicado na figura 4.22, e usou-se a matriz de massa consistente.

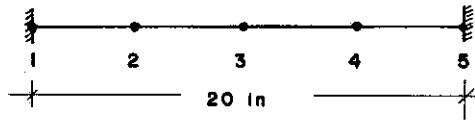


FIG. 4. 22

O modelo discreto assim obtido apresenta o período fundamental  $T_f = 0.01735s$  e o período mínimo  $T_{min} = 0.9965 \cdot 10^{-4}s$ , não tendo sido considerada a inércia de rotação.

A carga móvel, de 500 lb, percorreu a viga com velocidade constante definida pelo parâmetro  $\alpha = T_f/T_{trav}$ , onde  $T_{trav}$  é o tempo gasto pela carga para atravessar toda a extensão da viga.

A tabela 4.5 indica os valores de  $\alpha$  adotados, os tempos de travessia e as velocidades da carga (in/s) correspondentes.

$\alpha$	$T_{trav}$	V
2.0	0.008675	2305.4735
1.5	0.011567	1729.1066
1.0	0.01735	1152.7377
0.5	0.03470	576.3689

TABELA 4.5 - TEMPOS DE TRAVESSIA E VELOCIDADES

O intervalo de integração usado foi  $\tau = 0.2313 \cdot 10^{-4} s$  correspondente a  $0.133 \cdot 10^{-2} T_f$  e  $0.232 T_{min}$ .

Os resultados da análise linear estão na figura 4.23 que fornece, em ordenadas, o deslocamento vertical do nó central e, em abcissas, o tempo dividido pelo tempo de travessia correspondente ao valor de  $\alpha$  adotado.

Os resultados da análise não-linear, através do procedimento correspondente a TIPAN = 2, encontram-se na figura 4.24.

Observa-se que o deslocamento máximo se deu para  $\alpha = 2.0$  que corresponde a uma velocidade maior do que aquela que dá o máximo no caso linear ( $\alpha = 1.0$ ).

Adotou-se neste exemplo  $TOL1 = TOL2 = 0.1 \cdot 10^{-5}$ .



## DESLOCAMENTO VERTICAL DO NÓ 3

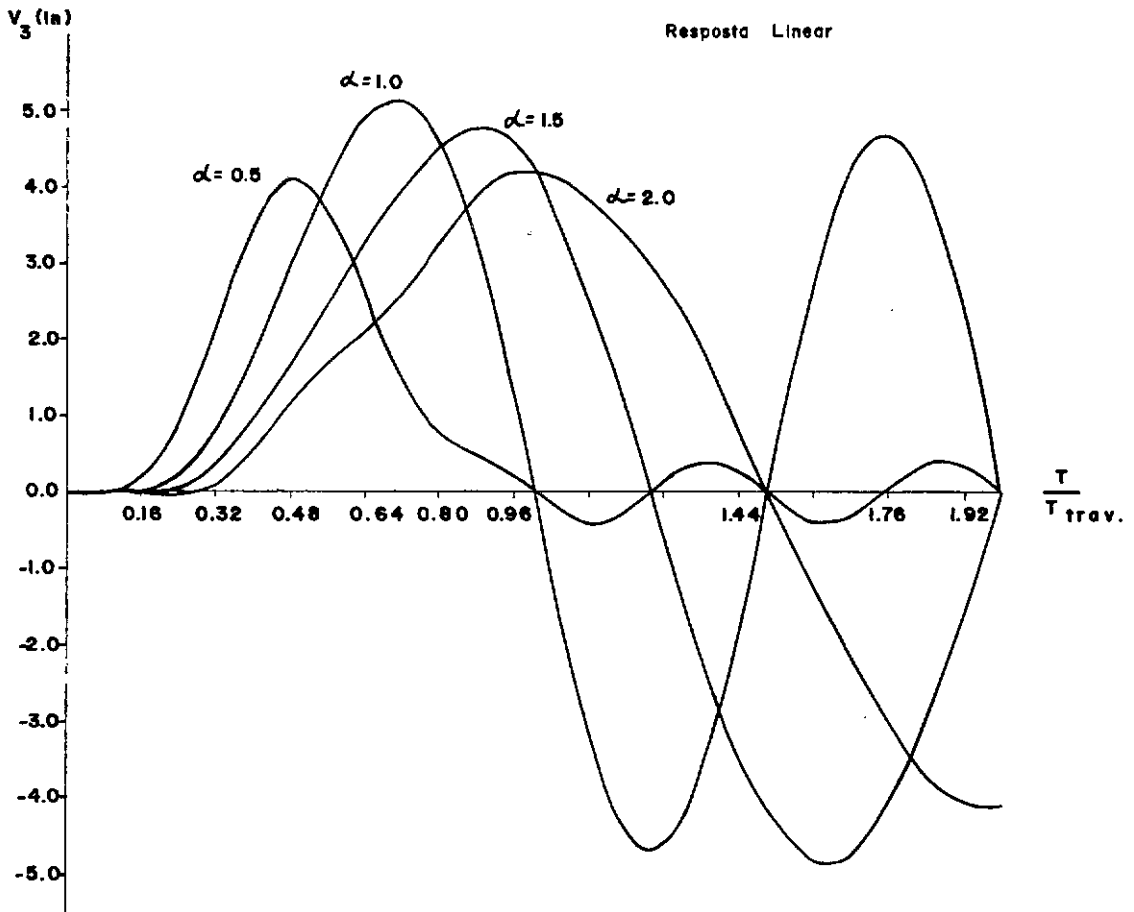


FIG. 4.23

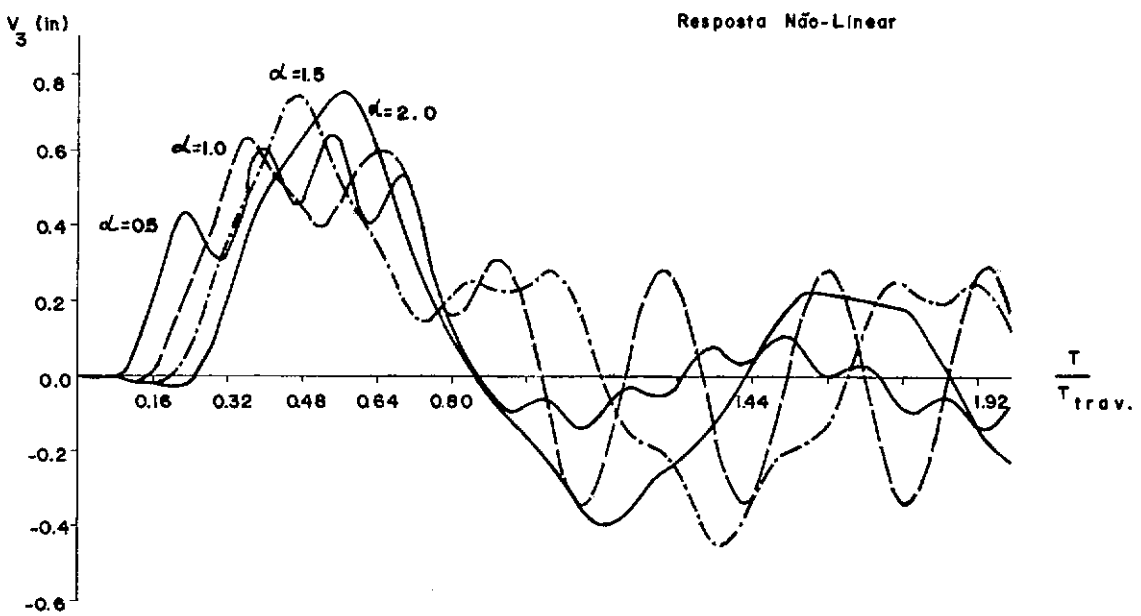


FIG. 4.24

#### 4.9 - CONCLUSÕES

O operador de integração discutido, em conjunto com o método dos elementos finitos, constitui uma ferramenta capaz de tratar o problema da resposta dinâmica de estruturas.

No domínio linear o algoritmo implementado não parece ser, no caso geral, competitivo, do ponto de vista de tempo de processamento, por ser iterativo e ter o intervalo de integração limitado pela condição de convergência desse processo iterativo, fig. 3.2.

O algoritmo modificado, incondicionalmente estável, permite intervalos de integração arbitrários porém envolve a solução direta de um sistema não-simétrico, de ordem  $2n$ , em cada intervalo. Embora preciso, tal esquema ainda não foi aplicado a problemas médios e grandes.

No domínio não-linear, o uso da matriz  $\underline{K}_0^*$  permite, em geral, o cálculo das forças elásticas por acumulação. Em alguns casos, entretanto, como estruturas de cabos em que algum elemento deixa de ser tracionado, o cálculo das forças elásticas deverá ser feito a partir da configuração deformada.

O uso da matriz tangente modificada  $\underline{K}_0^*$  e das expressões (3.64) fornecem, para os intervalos usualmente empregados [47], uma boa aproximação.

Em ambos os domínios, a maior eficiência dos algoritmos se dá em problemas de transientes curtos em que a contribuição dos modos mais altos é significativa, larguras de banda relativamente grandes e onde o uso de matriz de massa diagonal torna trivial a solução do sistema de equações, independentemente da forma da matriz de amortecimento adotada.

A convergência do processo iterativo é definida, para o caso de amortecimento proporcional, pelas figuras 3.2 e 3.3. Esses gráficos possibilitam uma aproximação para o caso de amortecimento não-proporcional sendo úteis também em problemas não lineares, onde a matriz de iteração é seccionalmente constante.

A introdução de amortecimento dificulta a convergência do processo iterativo sendo, por vezes, necessário usar um intervalo de integração menor do que aquele do problema sem amortecimento. Trata-se de uma característica inerente ao processo iterativo de resolução e não ao algoritmo de integração em si.

A discretização espacial deverá ser cuidadosa, evitando um refinamento desnecessário que daria origem a uma frequência de corte elevada e, conseqüentemente, um intervalo de integração muito pequeno, onerando a solução.

É interessante se ter pelo menos uma estimativa do período mínimo do modelo discreto para, com auxílio das figuras 3.2 e 3.3, se fazer a escolha do intervalo de integração.

Na sua região de utilização, em termos de intervalos de integração, e para os problemas analisados aqui e em [47], o algoritmo não se mostrou muito sensível à variações no intervalo de integração.

O uso da matriz tangente  $\underline{K}_0$  em problemas não-lineares é uma alternativa que merece ser analisada no que diz respeito à precisão e tempo de processamento.

A pesquisa de técnicas numéricas mais eficientes, para fazer frente a novas necessidades, continua e é atestada pelo grande volume de trabalhos na área.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 ARGYRIS, J.H. and CHAN, A.S.L. - Applications of Finite Elements in Space and Time - Ingenieur - Archiv 41, 235-257, 1972.
- 2 ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C. and ANGELOPOULOS, T. - Non-Linear Oscillations Using the Finite Element Technique - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 2, 203-250, 1973.
- 3 ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C. and ANGELOPOULOS, T. - Dynamic Response by Large Step Integration - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, 185-203, 1973.
- 4 GELFAND, I.M. and FOMIN, S.V. - Calculus of Variations - Prentice-Hall, Inc., 1963.
- 5 MEIROVITCH, L. - Analytical Methods in Vibrations - The MacMillan Company, 1967.
- 6 LOULA, A.F.D. e GALEÃO, A.C. - Vibração de Sistemas Elásticos Lineares - PDD 3/76, COPPE/UFRJ, 1976.
- 7 BREBBIA, C.A. and FERRANTE, A.J. (Editors) - The Finite Element Technique - Editora da UFRGS, 1975.
- 8 FEIJOO, R.A. - Aplicacion del Metodo de Ritz a Funcionales Relajados en Mecanica de los Solidos - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1973.
- 9 CLOUGH; R.W. - Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response - Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design - U.S.-Japan Seminar, Univ. of Alabama Press, 441-486, 1969.
- 10 NICKEL, R.E. - Direct Integration Methods in Structural Dynamics - ASCE, Vol. 99, No. EM2, 303-317, April, 1973.
- 11 DUNHAM, R.S.; NICKELL, R.E. and STICKLER, D.C. - Integration Operators for Transient Structural Response - Computer & Structures, Vol. 2, 1-15, 1972.
- 12 CLOUGH, R.W. and MOJTAHEDI, S. - Earthquake Response Analysis Considering Non-Proportional Damping - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 489-496, 1976.

- 13 NICKELL, R.E. - Nonlinear Dynamics by Mode Superposition - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7, 107-129, 1976.
- 14 BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis - Prentice-Hall, 1976.
- 15 CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - Dynamics of Structures - Mc Graw-Hill Inc., 1975.
- 16 GUIMARÃES, S.S. - Análise da Estabilidade de Métodos de Integração Passo a Passo - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
- 17 NICKELL, R.E. - On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics - International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, 301-319, 1971.
- 18 BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, No. 3, 283-291, 1973.
- 19 GOUDREAU, G.L. and TAYLOR, R.L. - Evaluation of Numerical Methods in Elastodynamics - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, 69-97, 1972.
- 20 HILBER, H.M.; HUGHES, T.J.R. and TAYLOR, R.L. - Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, 283-292, 1977.
- 21 KEY, S.W. and BEISINGER, Z.E. - The Transient Dynamic Analysis of Thin Shells by the Finite Element Method - 479-518, Proceedings of the Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Paterson Air Force Base, Ohio, 1971.
- 22 HINTON, E.; ROCK, T.A. and ZIENKIEWICZ, O.C. - A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 245-249, 1976.
- 23 ODEN, J.T.; KEY, J.E. and FOST, R.B. - A Note on the Analysis of Nonlinear Dynamics of Elastic Membranes by the Finite Element Method - Computers & Structures Vol. 4, 445-452, 1974.

- 24 SHANTARAM, D.; OWEN, D.R.J. and ZIENKIEWICZ, O.C. - Dynamic Transient Behaviour of Two and Three-Dimensional Structures Including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 561-578, 1976.
- 25 NEWMARK, N.M. - A Method of Computation for Structural Dynamics - ASCE, Vol. 85, No. EM3, 67-94, 1959.
- 26 NAGARAJAN, S. and POPOV, E.P. - Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Axisymmetric Solids - Computers & Structures, Vol. 4, 1117-1134, 1974.
- 27 WILSON, E.L.; FARHOOMAND, I. and BATHE, K.J. - Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 241-252, 1973.
- 28 McNAMARA, J.F. and MARCAL, P.V. - Incremental Stiffness Methods for Finite Element Analysis of the Nonlinear Dynamic Problem - Numerical and Computer Methods in Structural Dynamics, 353-376, Symposium held at Urbana, Illinois, Sept. 1971.
- 29 ARCHER, J.S. - Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems - ASCE, Vol. 85, No. ST4, 161-178, 1963.
- 30 EBNER, A.M. and UCCIFERRO, J.J. - A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods - Computers & Structures, Vol. 2, 1043-1061, 1972.
- 31 WILSON, E.L. and PENZIEN, J. - Evaluation of Orthogonal Damping Matrices - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, No. 1, 5-10, 1972.
- 32 JONES, A.T. and GRANT, J.E. - Generation and Properties of Banded Viscous Damping Matrices - Computers & Structures, Vol. 3, 1037-1051, 1973.
- 33 THOMSON, W.T.; CALKINS, T. and CARAVANI, P. - A Numerical Study of Damping - Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 3, 97-103, 1974.
- 34 BERGAN, P.G. and CLOUGH, R.W. - Convergence Criteria for Iterative Processes - A.I.A.A. Journal, Vol. 10, No. 8, 1107-1108, 1972.

- 35 TONG, P.; PIAN, T.H.H. and BUCCIARELLI, L.L. - Mode Shapes and Frequencies by Finite Element Method Using Consistent and Lumped Masses - Computers & Structures, Vol. 1, 623-638, 1971.
- 36 WEEKS, G. - Temporal Operators for Nonlinear Structural Dynamics Problems - ASCE, EM-5, 1087-1104, October, 1972.
- 37 FERRANTE, A.J. - Notas de Aula de Mecânica das Estruturas II - COPPE/UFRJ, 1975.
- 38 PRATES DE LIMA, E.C. - LORANE DINA - Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
- 39 EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL - Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear - Tese de D.Sc. - COPPE/UFRJ, 1977.
- 40 VENÂNCIO FILHO, F. - Dynamic Influence Lines of Beams and Frames - ASCE, No. 92, ST-2, 371-386, April, 1966.
- 41 BRUCH, Y.A. - Análise Dinâmica de Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1973.
- 42 JUNG, M.P. - Dinâmica de Estruturas Reticuladas sob Cargas Móveis pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1973.
- 43 FALABELLA, J.E. - Resposta Dinâmica de Estruturas Reticuladas a Cargas Móveis pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1975.
- 44 MIANA, P.R. - Análise Dinâmica de Vigas de Pontes pelo Método dos Elementos Finitos - Aplicação a Vigas Gerber - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1975.
- 45 GUERREIRO, J.N.C. - Dinâmica de Estruturas Prismáticas Laminares - Consideração de Cargas Móveis - Tese de M.Sc. - COPPE/UFRJ, 1977.
- 46 ALBRECHT, P. - Análise Numérica: Um Curso Moderno - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. - Rio, 1973.
- 47 CORREA BARBOSA, H.J.; MAIA DA COSTA, A.; EBECKEN, N.F.F. e VENÂNCIO FILHO, F. - Métodos de Integração Direta para a Análise Dinâmica Não-Linear - XIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural, Santiago, Chile, 1978. A ser publicado.

## APÊNDICE

## a) CARACTERÍSTICAS GERAIS DO PROGRAMA

O programa, desenvolvido em FORTRAN IV, segue o fluxograma mostrado no Ítem IV.7 e os procedimentos relativos à montagem de matrizes globais e introdução de condições de contorno foram baseados no fluxograma apresentado em [37].

As condições de contorno incluem o caso de apoios inclinados com relação ao referencial global. Todas as equações são levadas em conta na integração ao longo do tempo, inclusive aquelas correspondentes às direções impedidas.

As condições iniciais são supostas nulas:  $\underline{u}(0) = \dot{\underline{u}}(0) = \underline{0}$ . Entretanto, condições mais gerais poderão ser incorporadas sem maiores dificuldades.

As características dos elementos implantados encontram-se nos Ítems IV.2 e IV.3 salientando-se que foram desprezadas a deformação por corte e a variação da seção transversal e que as deformações são supostas pequenas.

O vetor de solicitações é montado automaticamente, para o caso de carga móvel, conforme indicado no Ítem IV.5. Procedimentos mais gerais para esta montagem, como os empregados no sistema LORANE [38, 39], podem ser implementados, de acordo com as necessidades do usuário.

## b) SUBROTINAS EMPREGADAS

## 1 - Subrotina DADOS

Lê e imprime todos os dados de entrada do programa.

Calcula e imprime a largura de banda e o comprimento inicial de cada elemento.



## 2 - Subrotina ROT

Forma a matriz de rotação de ordem (3x3) que é usada para a introdução de apoios inclinados e mudança de referenciais (local e global).

## 3 - Subrotina ROTM

Transforma as matrizes do elemento (6x6) do referencial local para o referencial global a partir da matriz de rotação obtida pela subrotina ROT.

## 4 - Subrotina MULTV

Efetua a multiplicação de uma matriz  $\underline{A}$  de ordem (N1xN2) por um vetor.

Caso o parâmetro ITRANS seja diferente de zero e a matriz  $\underline{A}$  seja quadrada, será obtido o produto de  $\underline{A}^T$  pelo mesmo vetor.

## 5 - Subrotina MULTM

Efetua o produto matricial  $\underline{C} = \underline{A} \underline{B}$  onde as matrizes são retangulares e conformes.

## 6 - Subrotina SACAP e BOTAP

São subrotinas auxiliares para retirar e colocar, respectivamente, vetores, correspondentes a um nó particular, em um vetor global da estrutura [37] .

## 7 - Subrotina SACA e BOTA

São subrotinas auxiliares para retirar e colocar, respectivamente, uma submatriz de uma matriz global da estrutura [37] .

## 8 - Subrotina MONTA

Forma as matrizes globais de massa e rigidez da estrutura com a semi-banda armazenada em forma unidimensional [37].

## 9 - Subrotina EXCITA

É uma subrotina, construída para cada caso particular, que forma os vetores globais de excitação da estrutura, "F", e sua derivada em relação ao tempo "DF" .

## 10 - Subrotina APOIO

Introduz as condições de contorno, do tipo deslocamento prescrito nulo, segundo eixos que podem ser inclinados em relação ao referencial global [37] .

## 11 - Subrotina TRIANG

Triangulariza uma matriz quadrada simétrica com sua semi-banda armazenada em forma de vetor.

## 12 - Subrotina RESOB

Resolve o sistema de equações lineares, após a triangularização da matriz dos coeficientes pela subrotina TRIANG, para vários vetores independentes armazenados sequencialmente.

## 13 - Subrotina RESOD

Resolve diretamente o sistema de equações lineares no caso trivial em que a matriz dos coeficientes é diagonal.

## 14 - Subrotina GLOBAL

Transforma os deslocamentos, referidos ao sistema local, de um apoio inclinado para o referencial global.

## 15 - Subrotina MULTB

Efetua o produto de uma matriz quadrada simétrica, com sua semi-banda armazenada em forma unidimensional, por um vetor.

## 16 - Subrotina CONV

Verifica se o critério de convergência adotado já foi satisfeito.

Vide ítem IV.6.

## 17 - Subrotina MASSP

Forma a matriz de massa (consistente ou diagonal) do elemento de pórtico plano no referencial local e transforma (via subrotinas ROT e ROTM) para o referencial global.

## 18 - Subrotina MASSC

O mesmo que a subrotina MASSP para os elementos de treliça e cabo, planos ou espaciais.

## 19 - Subrotina RIGEP

Forma a matriz de rigidez usual, linear, e a matriz geométrica para o elemento de pórtico plano, no referencial local, e transforma para o referencial global.

Calcula o vetor de forças elásticas nodais no referencial local.

No caso de  $TIPAN = 3$ , o vetor global de forças elásticas é montado por acumulação das contribuições dos elementos.

## 20 - Subrotina RIGEC

O mesmo que a subrotina RIGEP para os elementos de treliça e cabo, planos ou espaciais.

## 21 - Subrotina SAIDA

Imprime os deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós selecionados e os esforços nos nós dos elementos selecionados, nos intervalos de tempo especificados.

## 22 - Subrotina ESFLIN

Calcula e imprime, para cada elemento selecionado, os esforços seccionais nos nós no caso de análise linear.

## c) MANUAL DE ENTRADA DO PROGRAMA

Nº DE ORDEM	Nº DE CARTÕES	VARIÁVEIS	FORMATO
1	1	NNOS, NELEM, NAP, NNED, TIPAN, ESTAB, CARREG, MASSA	8I5
2	1	INROT, IAMOR, ALFA, BETA, TOL1, TOL2, TF, TAU, IMPRES	2I5, 6F10.0, I5
3	1	PV, VI, A, NEP	3F10.0, I5
4	NNOS	I, X(I), Y(I), Z(I), IMPDVA(I)	I5, 3F10.0, I5
5	NELEM	I, ITIPO(I), CONEC(I,1), CONEC(I,2), E(I), MESP(I), AX(I), IZ(I), FZERO(I), IMPFOR(I)	4I5, 5F10.0, I5
6	NNED	NO(I), (ED(I,J), J = 1,9)	I5, 9F8.0
7	NAP	(MCC(I,J), J = 1,5), (RLOCAL(I, J), J = 1,9)	5I5, 9F6.0
8	IT ÷ 8	C(I) I = 1, IT IT = NNOS * NGLN * LBNOS * NGLN	8F10.0

## DEFINIÇÕES E COMENTÁRIOS

1 - NNOS - Nº de nós da estrutura

NELEM - Nº de elementos

NAP - Nº de nós com alguma direção impedida

NNED - Nº de nós com algum elemento discreto

TIPAN - Indica o tipo de análise a ser efetuado:

TIPAN = 1 - Análise linear

TIPAN = 2 - Análise não linear onde o vetor de forças elásticas ao final do intervalo de integração é calculado por acumulação de  $\underline{K}_0^* \Delta \underline{u}$ .

TIPAN = 3 - Análise não linear onde o vetor de forças elásticas ao final do intervalo de integração é calculado a partir da configuração deformada.

ESTAB - Indica os coeficientes da expressão dos deslocamentos (3.45b) ou (3.56b).

ESTAB = 0 - São usados os coeficientes correspondentes ao algoritmo condicionalmente estável (3.45b).

ESTAB = 1 - São usados os coeficientes correspondentes ao algoritmo incondicionalmente estável (3.56b).

Como é usado o processo iterativo deve-se adotar ESTAB = 0 [2] .

CARREG - Igual a 1, indica carregamento qualquer definido pela subrotina EXCITA.

Igual a 2 para o caso de carga móvel como definida em IV.5 .

MASSA - Controla a montagem da matriz de massa. Vide Ítem IV.2.1.

2 - INROT - Controla a inclusão do efeito de inércia de rotação na matriz de massa. Vide Ítem IV.2.1.

IAMOR,

ALFA ,

BETA - Parâmetros que controlam a construção da matriz de amortecimento. Vide Ítem IV.4.

TOL1,

TOL2 - Tolerâncias para os testes de convergência respectivamente do vetor de deslocamentos e do vetor de derivadas das forças de inércia.

TF - Tempo até o qual se quer a resposta da estrutura.  
 TAU - Intervalo de integração  
 IMPRES - Intervalo de impressão dos resultados

3 - PV - Valor da carga móvel concentrada vertical  
 VI - Velocidade inicial da carga móvel  
 A - Aceleração constante da carga móvel  
 NEP - N° total de elementos percorridos pela carga  
 No caso de CARREG = 1 este cartão é deixado em branco.

4 - I - Número do nó  
 X(I),  
 Y(I),  
 Z(I) - Coordenadas do nó I. Para estruturas planas, Z = 0.  
 IMPDVA(I) - Deve ser feito igual a 1 quando se deseja imprimir  
 o deslocamento, velocidade e aceleração do nó I .

5 - I - Número do elemento  
 ITIPO(I) - Tipo do elemento I. Vide ítem IV.2.  
 CONEC(I,1)  
 CONEC(I,2) - Número dos nós 1 e 2 do elemento I .  
 E(I),  
 MESP(I) - Módulo de Young e massa específica do elemento I.  
 AX(I),  
 IZ(I) - Área e momento de inércia da seção transversal do elemento I .  
 FZERO(I) - Esforço normal inicial no elemento I, positivo se for de tração.  
 IMPFOR(I) - Deve ser feito igual a 1 quando se deseja imprimir  
 os esforços no elemento I .

6 - Cartões fornecidos apenas no caso de NNED  $\geq$  1  
 NO(I) - Número do nó com elemento discreto  
 ED(I,J) - Matriz das constantes dos elementos discretos. Vide  
 IV.3.

- 7 - MCC(I,J) - Matriz de condições de contorno
- MCC(I,1) - Número do nó com restrição
- MCC(I,2) - Quando igual a 1 indica restrição na direção 1
- MCC(I,3) - Quando igual a 1 indica restrição na direção 2
- MCC(I,4) - Quando igual a 1 indica restrição na direção 3
- Quando a direção é livre o valor fornecido deve ser zero.
- MCC(I,5) - Quando diferente de zero indica que as direções acima não são globais e os deslocamentos locais e globais são relacionados por  $\underline{u}_L = \underline{R} \underline{u}_G$  sendo a matriz de rotação  $\underline{R}$  contida em RLOCAL.
- RLOCAL(I,J) - Contém na linha I os elementos da matriz de rotação do apoio inclinado MCC(I,1) dados segundo suas linhas.
- Se MCC(I,5) = 0 , não são fornecidos.

8 - Cartões fornecidos apenas no caso de IAMOR = 3

C(I) - Matriz de amortecimento lida conforme Ítem IV.4

#### d) DIMENSIONAMENTO

O programa listado aqui está dimensionado da seguinte maneira:

- nº de nós - 100
- nº de elementos - 100
- nº de nós com apoio - 20
- nº de nós com elementos discretos - 50

Os vetores que armazenam os elementos da semi-banda superior das matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, estão dimensionados para:

$$(NNOS * NGLN) * (LBNOS * NGLN) \leq 10.000$$

onde:

NNOS - N° de nós

NGLN - N° de graus de liberdade por nó, no caso, igual a 3 .

LBNOS - Largura de banda em nós

e) LISTAGEM



```

SUBROUTINE DADOS(NO,ED,MCC,RLOCAL)
INTEGER CONEC,TIPAN,ESTAB,CARREG
REAL MESP,IZ,M1,M2,KHOLA,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
* TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
* IMPRES,CARREG
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
* Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
* YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100)
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100),IMPS2,IMPFOR(100)
COMMON /MOVE/ PV,VI,A,NEP
DIMENSION NO(50),ED(50,9),MCC(20,5),RLOCAL(20,9)
WRITE(IW,900)
900  FORMAT(/,20X,'-UM ALGORITMO DE ORDEM SUPERIOR PARA A INTEI
*, 'GRACAO DIRETA DAS EQUACOES DA DINAMICA ESTRUTURAL-',//,30X
*, 'TESE DE MESTRADO',12X,'HELIO JOSE CORREA BARBOSA',12X,
* 'COPPE/UFRJ',//)
READ(IR,100)NNOS,NELEM,NAP,NNED,TIPAN,ESTAB,CARREG,MASSA
100  FORMAT(8I5)
WRITE(IW,101)NNOS,NELEM,NAP,NNED,TIPAN,ESTAB,CARREG,MASSA
101  FORMAT(/,10X,'NNOS',5X,'NELEM',5X,'NAP',5X,'NNED',5X,'TIPAN
*, 'N',5X,'ESTAB',5X,'CARREG',5X,'MASSA',//,10X,4(I4,5X),I3,
* 9X,I1,10X,I1,9X,I1)
READ(IR,200)INROT,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,IMPRES
200  FORMAT(2I5,6F10,0,I5)

IF( INROT .NE. 0 ) INROT=1
IF( IAMOR .LT. 1 .OR. IAMOR .GT. 3 ) IAMOR=1

WRITE(IW,201)INROT,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,IMPRES
201  FORMAT(/,10X,'INROT',5X,'IAMOR',5X,'ALFA',10X,'BETA',10X,
* 'TOL1',10X,'TOL2',11X,'TF',11X,'TAU',6X,'IMPRES',//,12X,I1,
* 9X,I1,6(4X,E10,4),2X,I3)
READ(IR,300)PV,VI,A,NEP
300  FORMAT(3F10,0,I5)
IF( CARREG .EQ. 2 ) WRITE(IW,301) PV,VI,A,NEP
301  FORMAT(/,10X,'C A R G A      M O V E L',//,18X,'PV',18X,'VI'
*, 19X,'A',12X,'NEP',//,10X,3(F15,4,5X),I5)
READ(IR,400)(I,X(I),Y(I),Z(I),IMPDVA(I),K=1,NNOS)
400  FORMAT(15,3F10,0,I5)
WRITE(IW,401)(I,X(I),Y(I),Z(I),IMPDVA(I),I=1,NNOS)
401  FORMAT(/,10X,'C O R D E N A D A S      N O D A I S',//,11X
*, 'I',8X,'X(I)',10X,'Y(I)',10X,'Z(I)',11X,'IMPDVA(I)',//,
* (10X,I3,4X,F10,4,4X,F10,4,4X,F10,4,12X,I1))
READ(IR,500)(I,ITIPO(I),CONEC(I,1),CONEC(I,2),E(I),MESP(I),
* AX(I),IZ(I),FZERO(I),IMPFOR(I),K=1,NELEM)
500  FORMAT(4I5,5F10,0,I5)
LBNOS=0
JFIM=NNE-1
IMPS2=0
DO 14 I=1,NELEM

```

```

IMPS2=IMPS2+IMPFOR(I)
DO 13 J=1,JFIM
KIN=J+1
DO 12 K=KIN,NNE
L=IABS(CONEC(I,J)-CONEC(I,K))
IF(LBNOS=L)11,12,12
11 LBNOS=L
12 CONTINUE
13 CONTINUE
14 CONTINUE
LBNOS=LBNOS+1
IMPS1=0
DO 15 I=1,NNOS
IMPS1=IMPS1+IMPDVA(I)
XZERO(I)=X(I)
YZERO(I)=Y(I)
15 ZZZERO(I)=Z(I)
DO 16 I=1,NELEM
DX=X(CONEC(I,2))-X(CONEC(I,1))
DY=Y(CONEC(I,2))-Y(CONEC(I,1))
DZ=Z(CONEC(I,2))-Z(CONEC(I,1))
LZERO(I)=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
IF(TIPAN.GT.1) LZERO(I)=LZERO(I)/(1.+FZERO(I)/AX(I)/E(I))
ANGZ(I)=ATAN2(DY,DX)
16 CONTINUE
WRITE(IW,501)((I,ITIPO(I),CONEC(I,1),CONEC(I,2),E(I),MESP(I)
*,AX(I),IZ(I),FZERO(I),LZERO(I),ANGZ(I),IMPFOR(I),I=1,NELEM)
501 FORMAT(/,10X,'C A R A C T E R I S T I C A S   D O S   E'
*, 'L E M E N T O S',/,4X,'I   ITIPO(I)   NO 1   NO 2',6X'E(I'
*, 'I)',9X,'MESP(I)',8X,'AX(I)',9X,'IZ(I)',7X,'FZERO(I)',6X,'
*, 'LZERO(I)',7X,'ANGZ(I)',3X,'IMPFOR',/,(3X,I3,3X,I2,6X,I3,
*,4X,I3,7(4X,E10.4),4X,I1))
IF(NNED)2,2,1
1 READ(IR,600)((NO(I),(ED(I,J),J=1,9),I=1,NNED)
600 FORMAT(I5,9F8.0)
WRITE(IW,601)((NO(I),(ED(I,J),J=1,9),I=1,NNED)
601 FORMAT(/,10X,'E L E M E N T O S   D I S C R E T O S',/,
*,4X,'NO',8X,'M1',12X,'M2',12X,'M3',12X,'C1',12X,'C2',12X,'C'
*, 'I3',12X,'K1',12X,'K2',12X,'K3',/,(3X,I3,9(4X,E10.4)))
2 READ(IR,700)((MCC(I,J),J=1,5),(RLOCAL(I,J),J=1,9),I=1,NAP)
700 FORMAT(I5,9F6.0)
WRITE(IW,701)((MCC(I,J),J=1,5),(RLOCAL(I,J),J=1,9),I=1,NAP)
701 FORMAT(/,10X,'C O N D I C O E S   D E   C O N T O R N O'
*,/,4X,'NO   DIR. 1   DIR. 2   DIR. 3   ROTACAO',22X,'M A'
*, 'T R I Z   D E   R O T A C A O',/,(3X,I3,5X,I1,3(8X,I1
*),4X,9F10.5))
WRITE(IW,800) LBNOS
800 FORMAT(/,10X,'LARGURA DE BANDA EM NOS 1',I3,/)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,K)
DIMENSION R(3,3),RLOCAL(20,9)
IF( K .EQ. 0 ) GO TO 2
DO 10 I=1,3
R(1,I)=RLOCAL(K,I)
R(2,I)=RLOCAL(K,I+3)
10 R(3,I)=RLOCAL(K,I+6)
RETURN
2 Q=SQRT(CX*CX+CZ*CZ)
IF( Q .GT. 0.0001 ) GO TO 3
R(1,1)=0.
R(1,2)=CY
R(1,3)=0.
R(2,1)=-CY
R(2,2)=0.
R(2,3)=0.
R(3,1)=0.
R(3,2)=0.
R(3,3)=1.
RETURN
3 R(1,1)=CX
R(1,2)=CY
R(1,3)=CZ
R(2,1)=-CX*CY/Q
R(2,2)=0
R(2,3)=-CY*CZ/Q
R(3,1)=-CZ/Q
R(3,2)=0.
R(3,3)=CX/Q
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ROTM(RTSR,S,R)
DIMENSION RTSR(6,6),S(6,6),R(3,3)
DO 10 I=1,3
DO 10 J=1,3
E=0.
F=0.
G=0.
DO 20 N=1,3
RT=R(N,I)
DO 20 K=1,3
E=E+RT*S(N,K)*R(K,J)
F=F+RT*S(N,K+3)*R(K,J)
20 G=G+RT*S(N+3,K+3)*R(K,J)
RTSR(I,J)=E
RTSR(I,J+3)=F
10 RTSR(I+3,J+3)=G
DO 30 I=1,5
II=I+1
DO 30 J=II,6
30 RTSR(J,I)=RTSR(I,J)
RETURN
END

SUBROUTINE MULTV(VT1,A,VT2,N1,N2,ITRANS)
DIMENSION VT1(N1),VT2(N2),A(N1,N2)
IF( ITRANS .NE. 0 ) GO TO 2
DO 10 I=1,N1
VT1(I)=0.
DO 20 J=1,N2
20 VT1(I)=VT1(I)+A(I,J)*VT2(J)
10 CONTINUE
RETURN
2 DO 30 I=1,N1
VT1(I)=0.
DO 40 J=1,N2
40 VT1(I)=VT1(I)+A(J,I)*VT2(J)
30 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MULTM(C,A,B,N1,N2,N3)
DIMENSION C(N1,N3),A(N1,N2),B(N2,N3),V(3)
DO 10 I=1,N1
DO 20 J=1,N3
V(J)=0.
DO 20 K=1,N2
20 V(J)=V(J)+A(I,K)*B(K,J)
DO 30 J=1,N3
30 C(I,J)=V(J)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SACAP(I,P,N,VET,NV)
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS
DIMENSION P(NGLN),VET(NV)
K1=NGLN*(NNOS*(I-1)+N-1)
DO 10 K=1,NGLN
KK=K1+K
10 P(K)=VET(KK)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE BOTAP(I,P,N,VET,NV)
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS
DIMENSION P(NGLN),VET(NV)
K1=NGLN*(NNOS*(I-1)+N-1)
DO 10 K=1,NGLN
KK=K1+K
10 VET(KK)=P(K)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SACA(TEMP,N1,N2,VET)
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
DIMENSION TEMP(NGLN,NGLN),VET(IT)
K1=NGLN*(N1-1)
K2=NGLN*(N2-N1)
IF(N1=N2)10,11,12
10 DO 20 I=1,NGLN
   DO 20 J=1,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+K2+J-I+1
20   TEMP(I,J)=VET(IND)
      RETURN
11 DO 30 I=1,NGLN
   DO 30 J=I,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+J-I+1
      TEMP(I,J)=VET(IND)
30   TEMP(J,I)=TEMP(I,J)
      RETURN
12 WRITE(IW,100)N1,N2
100 FORMAT(/10X'ERRO NA SUBRT. SACA N1= 'I3' N2= 'I3')
      CALL EXIT
      END

```

```

SUBROUTINE BOTA (TEMP,N1,N2,VET)
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
DIMENSION TEMP(NGLN,NGLN),VET(IT)
K1=NGLN*(N1-1)
K2=NGLN*(N2-N1)
IF(N1=N2)10,11,12
10 DO 20 I=1,NGLN
   DO 20 J=1,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+K2+J-I+1
20   VET(IND)=TEMP(I,J)
      RETURN
11 DO 30 I=1,NGLN
   DO 30 J=I,NGLN
      IND=NGLN*LBNOS*(K1+I-1)+J-I+1
30   VET(IND)=TEMP(I,J)
      RETURN
12 WRITE(IW,100)N1,N2
100 FORMAT(/10X'ERRO NA SUBRT. BOTA N1= 'I3' N2= 'I3')
      CALL EXIT
      END

```

```

SUBROUTINE MONTA(MAT,NO,ED,MOUK)
LOGICAL BOOL,IMPRIM
INTEGER TIPEL,CONEC,TIPAN,ESTAB
REAL MAT,IZ,MESP,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/ BOOL,IMPRIM,INT
DIMENSION RIGE(6,6),TEMP(3,3),NO(50),ED(50,9),MAT(IT)
IF( MOUK ,NE. 1 ) GO TO 111
IF( MASSA ,EQ. 3 ) GO TO 222
111 DO 20 NEL=1,NELEM
TIPEL=ITIPO(NEL)
GO TO (1,2),MOUK
1 GO TO (3,4,4,4,4),TIPEL
3 CALL MASSP(NEL,RIGE,INROT,MASSA)
GO TO 7
4 CALL MASSC(NEL,RIGE,MASSA)
GO TO 7
2 GO TO (5,6,6,6,6),TIPEL
5 CALL RIGEP(NEL,RIGE)
GO TO 7
6 CALL RIGEC(NEL,RIGE)
7 DO 30 I=1,NNE
N1=CONEC(NEL,I)
DO 40 J=1,NNE
N2=CONEC(NEL,J)
IF(N1-N2)11,12,12
11 N11=N2
N22=N1
GO TO 13
12 N11=N1
N22=N2
13 CALL SACA(TEMP,N22,N11,MAT)
IF(N1-N2)15,16,14
14 DO 50 KK=1,NGLN
IK=NGLN*(I-1)+KK
DO 50 L=1,NGLN
IL=NGLN*(J-1)+L
50 TEMP(L,KK)=TEMP(L,KK)+RIGE(IK,IL)
GO TO 71
15 DO 60 KK=1,NGLN
IK=NGLN*(I-1)+KK
DO 60 L=1,NGLN
IL=NGLN*(J-1)+L
60 TEMP(KK,L)=TEMP(KK,L)+RIGE(IK,IL)
GO TO 71
16 DO 70 KK=1,NGLN

```

```

      IK=NGLN*(I-1)+KK
      DO 70 L=KK,NGLN
      IL=NGLN*(I-1)+L
70    TEMP(KK,L)=TEMP(KK,L)+RIGE(IK,IL)
71    CALL BOTA(TEMP,N22,N11,MAT)
40    CONTINUE
30    CONTINUE
20    CONTINUE
222   IF( NNED .LT. 1 ) RETURN
      JJ=2*NGLN
      IF(MOUK.EQ.1) JJ=0
      DO 80 I=1,NNED
      NOI=NO(I)-1
      DO 90 J=1,NGLN
      IND=LBNDOS*NGLN*(NGLN*NOI+J-1)+1
      MAT(IND)=MAT(IND)+ED(I,J+JJ)
90    CONTINUE
80    CONTINUE
      IF( TIPAN .NE. 3 .OR. MOUK .NE. 2 .OR. .NOT. BOOL ) RETURN
      DO 82 I=1,NNED
      II=NGLN*NO(I)+1
      DO 82 J=1,NGLN
82    FE(II-J)=FE(II-J)+D2(II-J)*ED(I,J+JJ)
      RETURN
      END

```

---



```

SUBROUTINE EXCITA(T,F,DF,NEQ)
INTEGER CONEC
REAL MESP
DIMENSION F(NEQ),DF(NEQ)
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100)
COMMON /MOVEL/ PV,VI,A,NEP,NELP,XLOCAL,XEL
XL=XEL
NEL=NELP
DO 10 I=1,NEQ
F(I)=0.
10 DF(I)=0.
IF(T.NE.0.) GO TO 11
XL=X(CONEC(1,2))
NEL=1
11 E=XLOCAL/XL
E2=E*E
E3=E2*E
V=VI+A*T
I=(CONEC(NEL,1)-1)*3
J=(CONEC(NEL,2)-1)*3
F(I+2)=PV*(1.-3.*E2+2.*E3)
F(I+3)=PV*XL*E*(1.-E)*(1.-E)
F(J+2)=PV*(3.*E2-2.*E3)
F(J+3)=PV*XL*E2*(E-1.)
DF(I+2)=PV*V*(-6.*E+6.*E2)/XL
DF(I+3)=PV*V*(1.-4.*E+3.*E2)
DF(J+2)=-DF(I+2)
DF(J+3)=PV*V*(3.*E2-2.*E)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE APOIO(MAT,VET,NEQ,NVET,RLOCAL,MCC,KOD)
REAL MAT
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS
DIMENSION P(3),P1(3),C(3,3),CT(3,3),R(3,3),RT(3,3),TEMP(3,3
*) ,RLOCAL(20,9),MCC(20,5),REMP(3,3),SEMP(3,3),VET(NEQ),
*MAT(IT)
DO 10 MM=1,NAP
  N=MCC(MM,1)
  DO 20 I=1,NGLN
    DO 30 J=1,NGLN
      C(I,J)=0.
30    R(I,J)=0.
      C(I,1)=1-MCC(MM,I+1)
20    R(I,1)=1.
      IF(MCC(MM,NGLN+2))1,2,1
1      CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,MM)
      CALL MULTM(C,C,R,NGLN,NGLN,NGLN)
2      GO TO(42,21,21),KOD
21    DO 22 I=1,NGLN
      DO 22 J=1,NGLN
      RT(J,I)=R(I,J)
22    CT(J,I)=C(I,J)
      IFIM=LBNOS-1
      DO 40 I=1,IFIM
        J=N-I
        IF(J)5,5,3
3      CALL SACA(TEMP,J,N,MAT)
      CALL MULTM(SEMP,TEMP,CT,NGLN,NGLN,NGLN)
      CALL BOTA(SEMP,J,N,MAT)
5      J=N+I
      IF(NNOS-J)40,6,6
6      CALL SACA(TEMP,N,J,MAT)
      CALL MULTM(SEMP,C,TEMP,NGLN,NGLN,NGLN)
      CALL BOTA(SEMP,N,J,MAT)
40    CONTINUE
      CALL SACA(TEMP,N,N,MAT)
      GO TO(42,42,43),KOD
42    DO 120 KK=1,NVET
      CALL SACAP(KK,P,N,VET,NEQ)
      CALL MULTV(P1,C,P,NGLN,NGLN,0)
      CALL BOTAP(KK,P1,N,VET,NEQ)
120    CONTINUE
43    GO TO(10,121,121),KOD
121    CALL MULTM(SEMP,TEMP,CT,NGLN,NGLN,NGLN)
      CALL MULTM(TEMP,C,SEMP,NGLN,NGLN,NGLN)
      DO 160 LL=1,NGLN
160    TEMP(LL,LL)=TEMP(LL,LL)+MCC(MM,LL+1)
      CALL BOTA(TEMP,N,N,MAT)
10    CONTINUE
      GO TO(181,11,11),KOD
11    DO 180 I=1,NNOS

```

```

      IND=LBNDOS*NGLN*(NGLN*(I-1)+2)+1
      IF(MAT(IND))180,170,180
170  MAT(IND)=1.
180  CONTINUE
181  RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE TRIANG(A,NEA,NEQ)
  DIMENSION A(NEA)
  LB=NEA/NEQ
  DO 30 N=1,NEQ
    I=N
    DO 29 L=2,LB
      I=I+1
      IND=L+(N-1)*LB
      IF(A(IND))24,29,24
24   C=A(IND)/A(1+IND-L)
      J=0
      DO 27 K=L,LB
        J=J+1
        IND1=K+(N-1)*LB
        IF(A(IND1))26,27,26
26   IND2=J+(I-1)*LB
        A(IND2)=A(IND2)+C*A(IND1)
27   CONTINUE
        A(IND)=C
29   CONTINUE
30   CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE RESOB(A,NEA,B,NEB,NVET)
DIMENSION A(NEA),B(NEB)
NEQ=NEB/NVET
LB=NEA/NEQ
DO 30 N=1,NEQ
I=N
DO 29 L=2,LB
I=I+1
IND=L+(N-1)*LB
IF(A(IND))28,29,28
28 DO 281 IV=1,NVET
INC=(IV-1)*NEQ
281 B(I+INC)=B(I+INC)-A(IND)*B(N+INC)
29 CONTINUE
DO 291 IV=1,NVET
INDV=N+(IV-1)*NEQ
291 B(INDV)=B(INDV)/A(1+(N-1)*LB)
30 CONTINUE
N=NEQ
35 N=N-1
IF(N)50,50,36
36 L=N
DO 40 K=2,LB
L=L+1
IND=K+(N-1)*LB
IF(A(IND))37,40,37
37 DO 371 IV=1,NVET
INC=(IV-1)*NEQ
371 B(N+INC)=B(N+INC)-A(IND)*B(L+INC)
40 CONTINUE
GO TO 35
50 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RESOD(A,NEA,B,NEB,NVET)
DIMENSION A(NEA),B(NEB)
NEQ=NEB/NVET
LB=NEA/NEQ
DO 20 IV=1,NVET
IVET=(IV-1)*NEQ
DO 10 I=1,NEQ
10 B(I+IVET)=B(I+IVET)/A((I-1)*LB+1)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GLOBAL(P,NP,MCC,RLOCAL)
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP
DIMENSION P(NP),RLOCAL(20,9),R(3,3),U1(3),U2(3),MCC(20,5)
NVET=NP/(NGLN*NNOS)
DO 10 I=1,NAP
  IF(MCC(I,5))1,10,1
1  CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,I)
  DO 20 J=1,NVET
    CALL SACAP(J,U1,MCC(I,1),P,NP)
    CALL MULTV(U2,R,U1,NGLN,NGLN,1)
20  CALL BOTAP(J,U2,MCC(I,1),P,NP)
10  CONTINUE
    RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE MULTB(A,V,P,NA,NV)
DIMENSION A(NA),V(NV),P(NV)
LB=NA/NV
DO 30 I=1,NV
  P(I)=0.
  DO 20 J=1,NV
    JB=J-I+1
    IF(JB=LB)9,9,30
9  IF(I=J)10,10,11
10  IND=JB+(I-1)*LB
    GO TO 19
11  IB=I-J+1
    IF(IB=LB)12,12,20
12  IND=IB+(J-1)*LB
19  P(I)=P(I)+A(IND)*V(J)
20  CONTINUE
30  CONTINUE
    RETURN
  END

```

```

SUBROUTINE CONV(V1,V2,N,TOL,ICONV)
REAL NORM1,NORMD
COMMON /GERAL/IR,IW
DIMENSION V1(N),V2(N)
ICONV=1
NORM1=0.
NORMD=0.
DO 10 I=1,N
NORM1=NORM1+V1(I)*V1(I)
10  NORMD=NORMD+(V2(I)-V1(I))*2
NORM1=SQRT(NORM1)
NORMD=SQRT(NORMD)
IF(NORM1-1.E-15)101,101,102
101 WRITE(IW,100)
100 FORMAT(/,10X,'NORMA DO VETOR V1 MENOR QUE 1.E-15!')
NORM1=1.
102 IF((NORMD/NORM1)-TOL)12,12,11
11  ICONV=2
12  RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MASSP(NEL,RTSR,INROT,MASSA)
INTEGER CONEC
REAL MESP,IZ
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100)
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9)
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
F=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL
G=MESP(NEL)*IZ(NEL)*INROT
GO TO (1,2,3),MASSA
1  RIGE(1,1)=F/3,
   RIGE(1,2)=0,
   RIGE(1,3)=0,
   RIGE(1,4)=F/6,
   RIGE(1,5)=0,
   RIGE(1,6)=0,
   RIGE(2,2)=F*13./35,      +      G*1.2/XL
   RIGE(2,3)=F*11./210.*XL  +      G*0.1
   RIGE(2,4)=0,
   RIGE(2,5)=F*9./70,      -      G*1.2/XL
   RIGE(2,6)=-F*13./420.*XL +      G*0.1
   RIGE(3,3)=F/105.*XL*XL  +      G*2./15.*XL
   RIGE(3,4)=0,
   RIGE(3,5)=-RIGE(2,6)
   RIGE(3,6)=-F/140.*XL*XL -      G/30.*XL
   RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
   RIGE(4,5)=0,
   RIGE(4,6)=0,
   RIGE(5,5)=RIGE(2,2)
   RIGE(5,6)=-RIGE(2,3)
   RIGE(6,6)=RIGE(3,3)
DO 10 I=1,5
  II=I+1
DO 10 J=II,6
10  RIGE(J,I)=RIGE(I,J)
CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,0.0,0)
CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
RETURN
2  DO 20 I=1,6
   DO 20 J=1,6
20  RTSR(I,J)=0,
   RTSR(1,1)=F*0.5
   RTSR(2,2)=RTSR(1,1)
   RTSR(3,3)=F*XL*XL/420,  +      G*XL*0.1
   RTSR(4,4)=RTSR(1,1)
   RTSR(5,5)=RTSR(1,1)
   RTSR(6,6)=RTSR(3,3)

```

3 RETURN  
END



```

SUBROUTINE MASSC(NEL,RTSR,MASSA)
  INTEGER CONEC, TIPEL
  REAL MESP
  COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
  *Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100)
  DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9)
  TIPEL=ITIPO(NEL)
  DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
  DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
  DZ=Z(CONEC(NEL,2))-Z(CONEC(NEL,1))
  IF( TIPEL .LT. 4 ) DZ=0.
  XL=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
  CX=DX/XL
  CY=DY/XL
  CZ=DZ/XL
  GO TO (111,222,333),MASSA
111 F=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL/3.
  RIGE(1,1)=F
  RIGE(1,2)=0.
  RIGE(1,3)=0.
  RIGE(1,4)=F*0.5
  RIGE(1,5)=0.
  RIGE(1,6)=0.
  RIGE(2,2)=F
  RIGE(2,3)=0.
  RIGE(2,4)=0.
  RIGE(2,5)=F*0.5
  RIGE(2,6)=0.
  RIGE(3,3)=0.
  RIGE(3,4)=0.
  RIGE(3,5)=0.
  RIGE(3,6)=0.
  RIGE(4,4)=F
  RIGE(4,5)=0.
  RIGE(4,6)=0.
  RIGE(5,5)=F
  RIGE(5,6)=0.
  RIGE(6,6)=0.
  GO TO(70,2,2,1,1),TIPEL
1  RIGE(3,3)= F
  RIGE(3,6)= F*0.5
  RIGE(6,6)= F
2  DO 10 I=1,5
  II=I+1
  DO 10 J=II,6
10  RIGE(J,I)=RIGE(I,J)
  CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)
  CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
  RETURN
222 DO 20 I=1,6
  DO 20 J=1,6

```

```
20  RTSR(1,J)=0,  
    RTSR(1,1)=MESP(NEL)*AX(NEL)*XL*0.5  
    RTSR(2,2)=RTSR(1,1)  
    RTSR(4,4)=RTSR(1,1)  
    RTSR(5,5)=RTSR(1,1)  
    GO TO (70,333,333,30,30),TIPEL  
30  RTSR(3,3)=RTSR(1,1)  
    RTSR(6,6)=RTSR(1,1)  
333 RETURN  
70  CALL EXIT  
    END
```

```

SUBROUTINE RIGEP(NEL,RTSR)
LOGICAL BOOL,IMPRIM
INTEGER CONEC,TIPAN
REAL IZ,MESP,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNDS,
* TIPAN
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
* Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
* YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
* FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/BOOL,IMPRIM,INT
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9),
* F1(3),F2(3),V1(3),V2(3),FEL(6),VG(6)
EQUIVALENCE (FEL(1),F1(1)),(FEL(4),F2(1)) ,
* (VG(1),V1(1)),(VG(4),V2(1))
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,0,0,0)
EA=E(NEL)*AX(NEL)
EI=E(NEL)*IZ(NEL)
NEQ=NGLN*NNOS
GO TO(1,2,2),TIPAN
1 F=FZERO(NEL)
GO TO 3
2 F=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*EA
3 RIGE(1,1)=EA/XL
RIGE(1,2)=0,
RIGE(1,3)=0,
RIGE(1,4)=-RIGE(1,1)
RIGE(1,5)=0,
RIGE(1,6)=0,
RIGE(2,2)=12.*EI/(XL**3) + F*1.2/XL
RIGE(2,3)=6.*EI/(XL*XL) + F*0.1
RIGE(2,4)=0,
RIGE(2,5)=-RIGE(2,2)
RIGE(2,6)=RIGE(2,3)
RIGE(3,3)=4.*EI/XL + F*2./15.*XL
RIGE(3,4)=0,
RIGE(3,5)=-RIGE(2,3)
RIGE(3,6)=2.*EI/XL = F/30.*XL
RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
RIGE(4,5)=0,
RIGE(4,6)=0,
RIGE(5,5)=RIGE(2,2)
RIGE(5,6)=RIGE(3,5)
RIGE(6,6)=RIGE(3,3)
DO 10 I=1,5
II=I+1

```

```

DO 10 J=1,6
10  RIGE(J,1)=RIGE(1,J)
    GO TO (23,21,22),TIPAN
21  IF(.NOT. IMPRIM) GO TO 4
22  CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),D2,NEG)
    CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),D2,NEG)
    CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,0)
    CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,0)
    FEL(1)=-F
    FEL(2)=(V1(2)-V2(2))*12.*EI/(XL**3)+(V1(3)+V2(3))*6.*EI/
*      (XL*XL)
    FEL(3)=(V1(2)-V2(2))*6.*EI/(XL*XL)+(V2(3)+2.*V1(3))*2.*EI/
*      XL
    FEL(4)= F
    FEL(5)=-FEL(2)
    FEL(6)=(V1(2)-V2(2))*6.*EI/(XL*XL)+(V1(3)+2.*V2(3))*2.*EI/
*      XL
DO 60 I=1,6
60  FORCA(NEL,I)=FEL(I)
    GO TO 4
23  DO 40 I=1,6
    DO 40 J=1,6
40  RIGEL(NEL,I,J)=RIGE(I,J)
4  CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
    IF( INT ,EQ. 0 ) GO TO 5
    IF( TIPAN ,NE. 3 ,OR. ,NOT. BOOL) RETURN
5  CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,1)
    CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,1)
    CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEG)
    CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEG)
    DO 30 I=1,6
30  FEL(I)=FEL(I)+VG(I)
    CALL BOTAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEG)
    CALL BOTAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEG)
    RETURN
END

```

```

SUBROUTINE RIGEC(NEL,RTSR)
LOGICAL BOOL
INTEGER CONEC,TIPAN,TIPEL
REAL MESP,IZ,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/BOOL,IMPRIM,INT
DIMENSION RIGE(6,6),RTSR(6,6),R(3,3),RLOCAL(20,9),
*      F1(3),F2(3),V1(3),V2(3),FEL(6),VG(6)
EQUIVALENCE (FEL(1),F1(1)),(FEL(4),F2(1)) ,
*      (VG(1),V1(1)),(VG(4),V2(1))
TIPEL=ITIPO(NEL)
DX=X(CONEC(NEL,2))-X(CONEC(NEL,1))
DY=Y(CONEC(NEL,2))-Y(CONEC(NEL,1))
DZ=Z(CONEC(NEL,2))-Z(CONEC(NEL,1))
IF( TIPEL .LT. 4 ) DZ=0.
XL=SQRT(DX*DX+DY*DY+DZ*DZ)
CX=DX/XL
CY=DY/XL
CZ=DZ/XL
DO 50 I=1,6
FEL(I)=0.
FORCA(NEL,I)=0.
DO 50 J=1,6
50  RIGE(I,J)=0.
GO TO (2,1,1),TIPAN
1  F=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*E(NEL)*AX(NEL)/XL
IF( F .GT. 0.) GO TO 3
GO TO (70,3,20,3,20),TIPEL
2  F=FZERO(NEL)/XL
3  RIGE(1,1)=E(NEL)*AX(NEL)/XL
RIGE(1,4)=-RIGE(1,1)
RIGE(4,1)=RIGE(1,4)
RIGE(4,4)=RIGE(1,1)
RIGE(2,2)=F
RIGE(2,5)=-F
RIGE(5,2)=-F
RIGE(5,5)=F
GO TO (70,60,60,40,40),TIPEL
40 RIGE(3,3)= F
RIGE(3,6)=-F
RIGE(6,3)=-F
RIGE(6,6)= F
60 GO TO (5,4,4),TIPAN
4  U2=(XL-LZERO(NEL))/LZERO(NEL)*XL
FORCA(NEL,1)=U2*RIGE(1,4)
FORCA(NEL,4)=-FORCA(NEL,1)

```

```

FEL(1)=FORCA(NEL,1)
FEL(4)=-FEL(1)
GO TO 6
5 DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,6
10 RIGEL(NEL,I,J)=RIGE(I,J)
6 CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)
CALL ROTM(RTSR,RIGE,R)
IF( INT .EQ. 0 ) GO TO 7
IF( TIPAN .NE. 3 .OR. .NOT. BOOL) RETURN
7 NEQ=NGLN*NNOS
CALL MULTV(V1,R,F1,3,3,1)
CALL MULTV(V2,R,F2,3,3,1)
CALL SACAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
CALL SACAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
DO 30 I=1,6
30 FEL(I)=FEL(I)+VG(I)
CALL BOTAP(1,F1,CONEC(NEL,1),FE,NEQ)
CALL BOTAP(1,F2,CONEC(NEL,2),FE,NEQ)
20 RETURN
70 CALL EXIT
END

```

```

SUBROUTINE SAIDA(T,ITERAD,ITERA,D2,V2,A2,NEQ)
INTEGER ESTAB,TIPAN,CARREG
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
*IMPRES,CARREG
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100)
DIMENSION D2(NEQ),V2(NEQ),A2(NEQ)
GO TO (1,2),CARREG
1 WRITE(IW,100)T,ITERAD,ITERA
GO TO 3
2 TR=2.*T/TF
WRITE(IW,100)TR,ITERAD,ITERA
100 FORMAT(/10X'TEMPO ',E15.7,5X,'ITERACOES 'I12,' , 'I12/)
3 IF(IMPS1 .EQ. 0) RETURN
WRITE(IW,200)
200 FORMAT(/,3X,'NO',10X,'D1',11X,'V1',11X,'A1',13X,'D2',11X,
*'V2',11X,'A2',13X,'D3',11X,'V3',11X,'A3',/)
DO 10 J=1,NNOS
I=3*J-2
IF(IMPDVA(J).EQ.1) WRITE(IW,300) J,D2(I),V2(I),A2(I),
* D2(I+1),V2(I+1),A2(I+1),D2(I+2),V2(I+2),A2(I+2)
300 FORMAT(I4,4X,3E13.5,2X,3E13.5,2X,3E13.5)
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ESFLIN
  INTEGER CONEC
  REAL MESP,IZ,LZERO
  COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM
  COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
  *Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
  *YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
  *FORCA(100,6),D2(300)
  COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100),IMPS2,IMPFOR(100)
  DIMENSION RIGE(6,6),V1(3),V2(3),V3(3),V4(3),V(6),R(3,3),
  *      F(6),U(6),RLOCAL(20,9)
  EQUIVALENCE (V3(1),V(1)),(V4(1),V(4)),(V1(1),U(1)),
  *(V2(1),U(4))
  NEQ=NGLN*NNOS
  WRITE(IW,200)
200  FORMAT(/,2X,'ELEM.      NO 1:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,
  *'ESF. 3',8X,'NO 2:      ESF. 1',12X,'ESF. 2',12X,'ESF. 3',/)
  DO 10 I=1,NELEM
    IF(IMPFOR(I),NE,1) GO TO 10
    DO 30 J=1,6
      DO 30 K=1,6
30    RIGE(J,K)=RIGEL(I,J,K)
      CALL SACAP(1,V1,CONEC(I,1),D2,NEQ)
      CALL SACAP(1,V2,CONEC(I,2),D2,NEQ)
      IF(ANGZ(I).EQ.0..AND. ITIPO(I).LT. 4) GO TO 20
      CX=(XZERO(CONEC(I,2))-XZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      CY=(YZERO(CONEC(I,2))-YZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      CZ=(ZZERO(CONEC(I,2))-ZZERO(CONEC(I,1)))/LZERO(I)
      IF( ITIPO(I).LT. 4 ) CZ=0.
      CALL ROT(R,RLOCAL,CX,CY,CZ,0)
      CALL MULTV(V3,R,V1,NGLN,NGLN,0)
      CALL MULTV(V4,R,V2,NGLN,NGLN,0)
      CALL MULTV(F,RIGE,V,6,6,0)
      GO TO 40
20    CALL MULTV(F,RIGE,U,6,6,0)
40    F(1)=F(1)-FZERO(I)
      F(4)=F(4)+FZERO(I)
      WRITE(IW,300) I,(F(J),J=1,6)
300  FORMAT(I4,' ',... ',3E18.7,4X,'*',3E18,7)
10  CONTINUE
  RETURN
  END

```

```

LOGICAL BOOL,IMPRIM
INTEGER CONEC,TIPAN,ESTAB,CARREG
REAL M(10000),K(10000),MESP,IZ,M1,M2,KMOLA,LZERO
COMMON /GERAL/IR,IW,IT,NNE,NGLN,NNOS,NELEM,NAP,NNED,LBNOS,
*TIPAN,ESTAB,INROT,MASSA,IAMOR,ALFA,BETA,TOL1,TOL2,TF,TAU,
*IMPRES,CARREG
COMMON /PROP/AX(100),MESP(100),CONEC(100,2),X(100),Y(100),
*Z(100),E(100),IZ(100),ITIPO(100),LZERO(100),XZERO(100),
*YZERO(100),ZZERO(100),ANGZ(100),FZERO(100),RIGEL(100,6,6),
*FORCA(100,6),D2(300),FE(300)
COMMON /LOGICO/ BOOL,IMPRIM,INT
COMMON /IMPRE/IMPS1,IMPDVA(100),IMPS2,IMPFOR(100)
COMMON /MOVE/ PV,VI,A,NEP,NELP,XLOCAL,XEL
DIMENSION ED(50,9),MCC(20,5),RLOCAL(20,9),NO(50),CAD(8),
*      C(10000),P(900),F(300),DF(300),D1(300),V1(300),
*      FI1(300),DFI1(300),FI2(300),DFI2(300),DD(300),
*      DDZ(300),V2(300),A2(300),FI22(300),DFI22(300),
*      AA(300),BB(300),CC(300),AA1(300),BB1(300),CC1
*      (300)
DATA CAD/21.,3.,9.,2.,20.,2.5,10.,2.5/
TEMPO=TIME(2)
IR=8
IW=5
ITMAX=50
NNE=2
NGLN=3
CALL DADOS(NO,ED,MCC,RLOCAL)
C1=TAU*0.5
C2=TAU*TAU/12.
C3=TAU*TAU/60.*CAD(4*ESTAB+1)
C4=TAU*TAU/60.*TAU*CAD(4*ESTAB+2)
C5=TAU*TAU/60.*CAD(4*ESTAB+3)
C6=TAU*TAU/60.*TAU*CAD(4*ESTAB+4)
INCLI=0
DO 5 I=1,NAP
IF(MCC(I,5))6,5,6
5  CONTINUE
GO TO 7
6  INCLI=1
7  NEQ=NGLN*NNOS
   NC=NGLN*LBNOS
   IT=NEQ*NC
DO 10 I=1,IT
M(I)=0.
C(I)=0.
10 K(I)=0.
   BOOL=.FALSE.
   IMPRIM=.TRUE.
   INT=0
   CALL MONTA(K,NO,ED,2)
   IMPRIM=.FALSE.

```



```

CALL MONTA(M,NO,ED,1)
WRITE(IW,3902)(FE(I),I=1,NEQ)
3902 FORMAT(/10X,'FORÇAS ELÁSTICAS EM T=0',/(10X,3E15.7))
GO TO (103,101,102),IAMOR
101 DO 11 I=1,IT
11 C(I)=ALFA*M(I)+BETA*K(I)
IF(NNED.LT.1) GO TO 103
DO 110 I=1,NNED
NOI=NO(I)-1
DO 110 J=1,NGLN
IND=LBNS*(NGLN*(NGLN+NOI+J-1)+1)
110 C(IND)=C(IND)+ED(I,J+NGLN)
GO TO 103
102 READ(IR,400)(C(I),I=1,IT)
400 FORMAT(BF10.0)
103 T=0.
GO TO (106,104),CARREG
C----- CARGA MOVEL ----
104 COMP=X(CONEC(NEP,2))
NELP=0
X0=0.
XEL=0.
C----- CARGA MOVEL ----
106 CALL EXCITA(T,F,DF,NEQ)
9 DO 30 I=1,NEQ
AA1(I)=0.
BB1(I)=0.
DI(I)=0.
VI(I)=0.
30 FI1(I)=F(I)
CALL APOIO(M,F,NEQ,1,RLOCAL,MCC,2)
WRITE(IW,100)(M(I),I=1,IT)
100 FORMAT(10X,'M A T R I Z   D E   M A S S A',/(6E15.7,/))
IF(IAMOR.NE.1) WRITE(IW,600)(C(I),I=1,IT)
600 FORMAT(/,10X,'M A T R I Z   D E   A M O R T E C I M E N T O',/(6E15.7,/))
WRITE(IW,900)(K(I),I=1,IT)
900 FORMAT(/,10X,'M A T R I Z   D E   R I G I D E Z',/(6E15.7,/))
IF(MASSA.GT.1) GO TO 31
CALL TRIANG(M,IT,NEQ)
CALL RESOB(M,IT,F,NEQ,1)
GO TO 32
31 CALL RESOD(M,IT,F,NEQ,1)
32 IF(INCLI.GT.0) CALL GLOBAL(F,NEQ,MCC,RLOCAL)
GO TO (34,33,33),IAMOR
33 CALL MULTB(C,F,AA,IT,NEQ)
34 DO 40 I=1,NEQ
40 DFI1(I)=DF(I)-AA(I)
1000 INT=INT+1
T=INT*TAU

```

```

ITERA=0
BOOL=,FALSE.
IMPRIM=,FALSE.
IF(INT/IMPRES*IMPRES ,EQ. INT) IMPRIM=,TRUE.
C-----AQUI SE INSERE O "CHECK"-----
DO 13 I=1,NEQ
  DFI2(I)=DFI1(I)
  FI2(I)=FI1(I)+TAU*DFI1(I)
  AA(I)=C1*FI1(I)+C2*DFI1(I)
13  BB(I)=C3*FI1(I)+C4*DFI1(I)
  GO TO (44,131),CARREG
C-----CARGA MOVEL -----
131  S=VI*T+0,5*A*T*T
  XLOCAL=S-X0
  IF(S=COMP)43,43,41
41  DO 42 I=1,NEQ
  F(I)=0.
42  DF(I)=0.
  GO TO 2000
43  IF(XLOCAL.LE.XEL) GO TO 44
  NELP=NELP+1
  IF( NELP .GT. NEP ) GO TO 41
  X0=X0+XEL
  XLOCAL=S-X0
  XEL=X(CONEC(NELP,2))-X(CONEC(NELP,1))
  WRITE(IW,601)T,S,XEL,NELP
601  FORMAT(/,18X,'T',19X,'S',18X,'XEL',12X,'NELP',/,10X,
  *3(E15,7,5X),15,/)
C-----CARGA MOVEL -----
44  CALL EXCITA(T,F,DF,NEQ)
2000 ITERA=ITERA+1
  DO 14 I=1,NEQ
  P(I)=FI2(I)
  P(I+NEQ)=AA(I)+C1*FI2(I)-C2*DFI2(I)
14  P(I+2*NEQ)=BB(I)+C5*FI2(I)-C6*DFI2(I)
  CALL APOIO(M,P,3*NEQ,3,RLOCAL,MCC,1)
  IF(MASSA .GT. 1) GO TO 15
  CALL RESQB(M,IT,P,3*NEQ,3)
  GO TO 16
15  CALL RESOD(M,IT,P,3*NEQ,3)
16  IF(INCLI .GT. 0) CALL GLOBAL(P,3*NEQ,MCC,RLOCAL)
  DO 17 I=1,NEQ
  DD(I)=P(I+2*NEQ)+TAU*V1(I)
  D2(I)=D1(I)+DD(I)
  V2(I)=V1(I)+P(I+NEQ)
17  A2(I)=P(I)
200  FORMAT(/,6E15,7)
  GO TO (172,171,171),IAMOR
171  CALL MULTB(C,A2,AA1,IT,NEQ)
  CALL MULTB(C,V2,BB1,IT,NEQ)
172  CALL MULTB(K,V2,CC,IT,NEQ)

```

```

CALL MULTB(K,DD,CC1,IT,NEQ)
DO 18 I=1,NEQ
DFI22(I)=DF(I)-CC(I)-AA1(I)
18 FI22(I)=F(I)-FE(I)-CC1(I)-BB1(I)
IF(BOOL.OR,TIPAN,EQ.1) GO TO 20
IF( ITERA .LE. 1 ) GO TO 208
CALL CONV(DDZ,DD,NEQ,TOL1,ICONV)
GO TO (202,207),ICONV
202 DO 204 I=1,NNOS
X(I)=X(I)+DD(3*I-2)
Y(I)=Y(I)+DD(3*I-1)
204 Z(I)=Z(I)+DD(3*I)
ITERAD=ITERA
CALL MONTA(K,NO,ED,2)
DO 206 I=1,IT
206 K(I)=0.5*K(I)
BOOL=.TRUE.
GO TO 172
207 IF(ITERA,GT,ITMAX) GO TO 241
208 DO 210 I=1,NEQ
DFI2(I)=DFI22(I)
FI2(I)=FI22(I)
210 DDZ(I)=DD(I)
GO TO 2000
20 CALL CONV(DFI2,DFI22,NEQ,TOL2,ICONV)
GO TO (25,21),ICONV
21 IF( ITERA .GE. ITMAX ) GO TO 241
DO 24 I=1,NEQ
DFI2(I)=DFI22(I)
24 FI2(I)=FI22(I)
GO TO 2000
241 WRITE(IW,300)ITMAX
300 FORMAT(/,10X'NAO HOUVE CONVERGENCIA APOS '13' ITERACOES,
*! EXECUCAO INTERROMPIDA!//,10X'VALORES FINAIS:!)
GO TO 2501
25 IF(.NOT. IMPRIM) GO TO 251
2501 CALL SAIDA(T,ITERAD,ITERA,D2,V2,A2,NEQ)
IF(IMPRIM .AND. TIPAN .EQ. 1 ,AND. IMPS2 ,NE. 0)CALL ESFLIN
IF(.NOT.BOOL,AND,TIPAN,GT.1) WRITE(IW,500)
500 FORMAT(/,10X' NAO HOUVE CONVERGENCIA NOS DESLOCAMENTOS.!)
GO TO (251,26),ICONV
251 IF(T-TF)27,252,252
252 TEMPO=(TIME(2)-TEMPO)/60.
WRITE(IW,1591) TEMPO
1591 FORMAT(/,10X,'TEMPO DE PROCESSAMENTO :',E12.5)
26 CALL EXIT
27 DO 28 I=1,NEQ
DFI1(I)=DFI22(I)
FI1(I)=FI22(I)
D1(I)=D2(I)
28 V1(I)=V2(I)

```

```

      GO TO (29,29,50),TIPAN
29    DO 291 I=1,NEQ
291   FE(I)=FE(I)+CC1(I)
      GO TO (1000,50,50),TIPAN
50    DO 52 I=1,NNOS
      X(I)=XZERO(I)+D2(3+I-2)
      Y(I)=YZERO(I)+D2(3+I-1)
52    Z(I)=ZZERO(I)+D2(3+I)
      DO 54 I=1,IT
54    K(I)=0.
      GO TO (1000,90,55),TIPAN
55    DO 70 I=1,NEQ
70    FE(I)=0.
90    CALL MONTA(K,NO,ED,2)
      IF(.NOT. IMPRIM .OR. IMPS2 .EQ. 0) GO TO 1000
      WRITE(IW,800)
800   FORMAT(/,2X,'ELEM.      NO 1:      ESF, 1',12X,'ESF, 2',12X,
+ 'ESF, 3',8X,'NO 2:      ESF, 1',12X,'ESF, 2',12X,'ESF, 3',/)
      DO 60 I=1,NELEM
      IF(IMPFOR(I) .EQ. 1) WRITE(IW,700)I,(FORCA(I,J),J=1,6)
700   FORMAT(I4,' ..... ',3E18.7,4X,'*',3E18.7)
60    CONTINUE
      GO TO 1000
      END

```